

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

**LA METHODE DES ELEMENTS FINIS : PRINCIPES DE BASE ET TECHNIQUES  
D'APPLICATION EN MECANIQUE DES STRUCTURES**

<b>1 - Historique sommaire de la méthode des éléments finis .....</b>	<b>1</b>
<b>2 - Classification des problèmes traités en mécanique des structures .....</b>	<b>1</b>
2.1 - Les problèmes linéaires .....	2
2.1.1 - Analyse statique linéaire .....	2
2.1.2 - Analyse de stabilité initiale .....	2
2.1.3 - Analyse dynamique linéaire .....	2
2.2 - Les problèmes non-linéaires .....	3
<b>3 - Formulation variationnelle en mécanique des structures : les diverses approches .....</b>	<b>3</b>
3.1 - Préliminaires .....	3
3.2 - L'approche cinématique (modèle "déplacement") .....	4
3.3 - L'approche équilibre (modèle "contrainte") .....	5
3.4 - Les modèles mixtes .....	6
3.5 - Récapitulation .....	7
<b>4 - Les méthodes matricielles en mécanique des structures .....</b>	<b>7</b>
4.1 - Formulation matricielle des équations de base .....	8
4.2 - La matrice de rigidité .....	8
<b>5 - L'approche de Ritz. Le principe de base de la méthode des éléments finis .....</b>	<b>9</b>
5.1 - L'approche de Ritz .....	10
5.2 - Le principe de base de la méthode des éléments finis .....	11
<b>6 - La discrétisation de la structure et les calculs au niveau élémentaire .....</b>	<b>11</b>
6.1 - Un exemple concret .....	12
6.2 - Le problème approché .....	12

6.3 - Les calculs au niveau élémentaire .....	13
6.4 - Le calcul des fonctions d'interpolation .....	16
<b>7 - Les calculs au niveau global. Les méthodes de résolution dans le cas de l'analyse statique .....</b>	<b>18</b>
7.1 - L'assemblage des caractéristiques élémentaires .....	18
7.2 - La prise en compte des déplacements imposés .....	20
7.3 - Les méthodes de résolution des systèmes linéaires .....	22
7.3.1 - Présentation générale .....	22
7.3.2 - La méthode d'élimination de Gauss et la méthode de Cholesky .....	23
7.3.3 - Les méthodes de mémorisation des grandes matrices ..	24
<b>8 - Les éléments finis usuels .....</b>	<b>26</b>
<b>9 - Les éléments finis en dynamique .....</b>	<b>27</b>
9.1 - Le principe variationnel pour les problèmes de la dynamique .....	27
9.2 - Application de la méthode des éléments finis aux problèmes de la dynamique .....	28
9.2.1 - Discrétisation de la structure .....	28
9.2.2 - Formulation élémentaire .....	29
9.2.3 - Formulation globale - Assemblage .....	29
<b>10 - Les divers domaines d'applications de la méthode des éléments finis .....</b>	<b>30</b>
<b>11 - Références bibliographiques .....</b>	<b>34</b>

## LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

### PRINCIPES DE BASE ET TECHNIQUES D'APPLICATION EN MECANIQUE DES STRUCTURES

-----

#### 1 - HISTORIQUE SOMMAIRE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Historiquement, la méthode des éléments finis (MEF) est le fruit de l'évolution des méthodes matricielles appliquées à la mécanique des milieux continus et dont le développement a connu un essor important depuis 1950. Les bases théoriques de la méthode reposent d'une part sur la formulation énergétique des équations de la Mécanique et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

A ce sujet, il faut citer l'approche variationnelle du problème de la mécanique des structures élaborée par Ritz (1908), ainsi que la contribution de Courant (1943), montrant la possibilité d'une résolution de certains problèmes de la mécanique des milieux continus par l'emploi d'une discrétisation spatiale, tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles, (11), (8).

Mais c'est surtout en 1955 et 1956 que se situe le début de la MEF comme technique de calcul des structures complexes (approche unifiée des méthodes des déplacements et des forces en 1955 par Argyris et présentation systématique de la méthode des déplacements en 1956 par Turner et Clough), (1), (2), (12).

#### 2 - CLASSIFICATION DES PROBLEMES TRAITES EN MECANIQUE DES STRUCTURES

Suivant qu'il y a prise en compte ou non des efforts d'inertie, le problème traité est respectivement dynamique ou statique. Par ailleurs, suivant qu'il y a prise en compte ou non des effets de non-linéarité, le problème peut être non-linéaire ou linéaire.

## 2.1 - Les problèmes linéaires

### 2.1.1 - Analyse statique linéaire

Ce problème se ramène à la résolution du système :

$$Kq = F$$

avec :

$K$  : matrice de rigidité de la structure.

$q$  : vecteur des déplacements inconnus.

$F$  : vecteur des forces généralisées de la structure.

### 2.1.2 - Analyse de stabilité initiale

Le problème se ramène à résoudre un système aux valeurs propres, du type :

$$[K + \lambda K_G] z = 0$$

avec :

$K$  : matrice de rigidité.

$\lambda_k$  : paramètres de charge critique.

$z_k$  : les modes de flambage correspondant à  $\lambda_k$ .

### 2.1.3 - Analyse dynamique linéaire

L'analyse dynamique linéaire consiste à déterminer les déplacements (éventuellement les vitesses et les accélérations), ainsi que les contraintes en fonction du temps pour une structure à comportement linéaire soumise à des sollicitations dynamiques. Le problème se ramène à la résolution du système différentiel suivant :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F(t)$$

avec :

$M$  : matrice de masse.

$C$  : matrice d'amortissement.

Dans le cas où on recherche les modes propres de vibrations, on se ramène à résoudre un problème aux valeurs propres symétrique :

$$[K - \lambda M] x = 0$$

avec :

$\lambda_k = \omega_k^2$  : carré de la pulsation propre à laquelle correspond le mode  $x_k$  associé.

## 2.2 - Les problèmes non linéaires

Les non linéarités peuvent être :

- non linéarités géométriques. C'est le cas des déplacements importants pour lesquels l'hypothèse des petites déformations n'est plus valable.
- non linéarités constitutives. C'est le cas où la loi de comportement du matériau est non linéaire. Le comportement plastique en est un exemple courant.

Les problèmes non linéaires peuvent être classés d'une façon similaire à celle exposée au paragraphe 2.1 pour les problèmes linéaires.

## 3 - FORMULATION VARIATIONNELLE EN MECANIQUE DES STRUCTURES : LES DIVERSES APPROCHES

### 3.1 - Préliminaires

Dans certains cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelle, c'est-à-dire sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle.

Suivant la nature de cette fonctionnelle, on peut avoir les 3 formulations suivantes :

- l'approche cinématique (modèle "déplacement"),
- l'approche équilibre (modèle "contrainte"),
- les modèles mixtes.

La solution du problème formé par les équations (3.7) et (3.8) n'est qu'une solution approchée du problème réel. On peut estimer l'erreur commise en essayant de vérifier les équations d'équilibre

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

$$\sigma_{ij} n_j = g_i$$

de façon à apprécier ainsi si l'approximation obtenue est satisfaisante.

### 3.3 - L'approche équilibre (modèle "contrainte")

Il s'agit de chercher une formulation variationnelle pour un champ de contraintes statiquement admissible. On se limite donc à un sous-espace  $\Sigma_m$  de l'espace  $\Sigma$  des contraintes réelles pour lequel

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

$$\sigma_{ij} n_j = g_i$$

On peut montrer, (5), que dans ce cas la solution du problème se ramène à chercher le minimum de l'énergie potentielle d'un champ statiquement admissible

$$\inf \{ U'(\sigma) \mid \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \sigma_{ij} n_j = g_i \} \quad (3.9)$$

avec :

$$U'(\sigma) = \int_{S_v} \sigma_{ij} n_j v_i dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega \quad (3.10)$$

Une estimation de l'approximation achevée par l'approche équilibre peut être obtenue en essayant de vérifier les conditions aux limites cinématiques (ce qui montrera si l'erreur commise est négligeable ou non).

### 3.4 - Les modèles mixtes

Dans les deux approches précédentes, on a cherché une approche variationnelle en se limitant, soit à un sous-espace  $V_n$  (modèle "déplacement"), soit à un sous-espace  $\Sigma_m$  (modèle "contrainte"). Il est possible de chercher une solution qui repose sur une approximation d'un champ de contraintes en équilibre à l'intérieur du domaine  $\Omega$  et simultanément sur les frontières de  $\Omega$  d'un champ de déplacements cinématiquement admissible. Il s'agit de modèles mixtes.

On cherche donc à trouver :

$$(\bar{v}, \sigma) \in V \times \Sigma \quad (3.11)$$

non pas sur  $V \times \Sigma$  mais sur un sous-espace  $V_n \times \Sigma_m$  de dimension finie de  $V \times \Sigma$ .

On démontre, (5), que le problème se ramène à chercher :

$$\inf_v \sup_\sigma \Lambda(\bar{v}, \sigma) = \sup_\sigma \inf_v \Lambda(\bar{v}, \sigma) \quad (3.12)$$

avec :

$\Lambda(\bar{v}, \sigma)$  : énergie de Reissner

et

$$\begin{aligned} \Lambda(\bar{v}, \sigma) = & \int_{\Omega} [-W_c(\sigma_{ij}) - f_i v_i + \frac{\sigma_{ij}}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})] d\Omega - \int_{S_\sigma} g_i v_i dS - \\ & - \int_{S_v} \sigma_{ij} n_j (v_i - \bar{v}_i) dS \end{aligned} \quad (3.13)$$

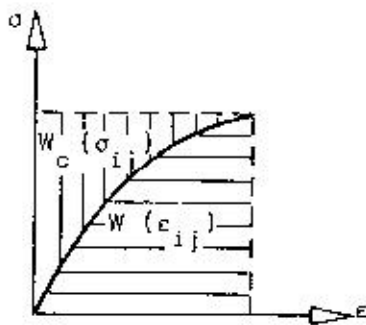
Dans la relation (3.13),  $W_c$  est l'énergie complémentaire. On rappelle ici que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.14)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial W_c(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.15)$$

$$W + W_c = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (3.16)$$





$W(\epsilon_{ij})$  : énergie élastique

$W_c(\sigma_{ij})$  : énergie complémentaire

### 3.5 - Récapitulation

Le tableau suivant récapitule les diverses approches variationnelles des problèmes de la Mécanique des Structures.

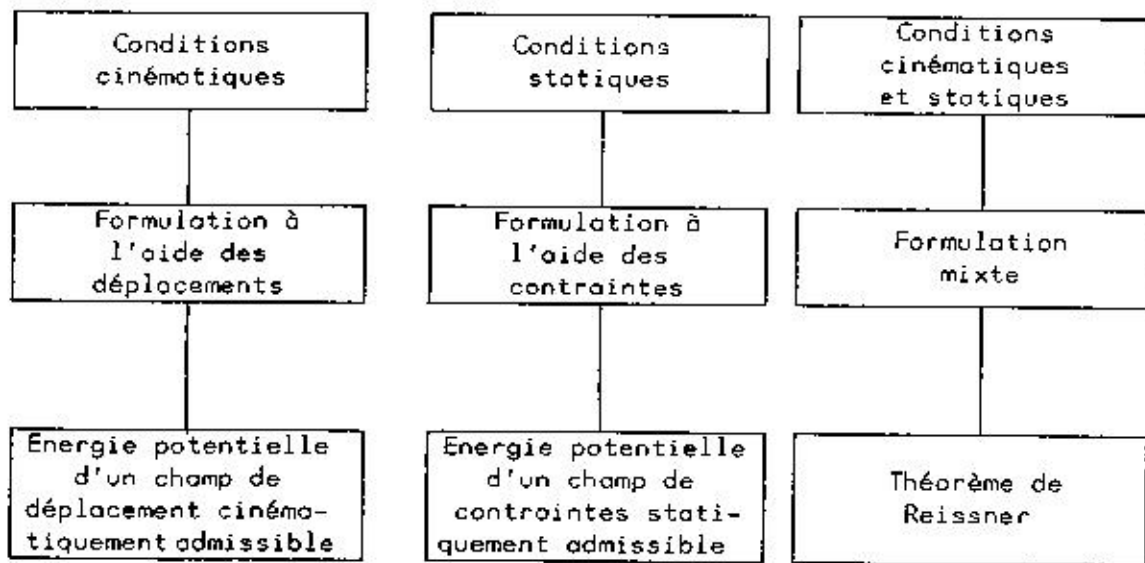


Tableau 3.1 - Les formulations variationnelles en mécanique des structures.

## 4 - LES METHODES MATRICIELLES EN MECANIQUE DES STRUCTURES

Une fois défini le comportement de la structure au niveau local, il se pose le problème d'étudier son comportement au niveau global. Les méthodes matricielles nous en donnent la possibilité, (9).

#### 4.1 - Formulation matricielle des équations de base

##### Equation cinématique

$$e = Dv$$

avec :

$e$  : vecteur des déformations.

$v$  : vecteur des déplacements.

$D$  : matrice d'opérateurs différentiels.

##### Equation d'équilibre

$$D^t \sigma + f = 0 \quad (3.18)$$

avec :

$\sigma$  : tenseur des contraintes.

$f$  : vecteur des forces de volume.

##### Loi de comportement

$$\sigma = C \varepsilon \quad (3.19)$$

avec :

$C$  : tenseur d'élasticité.

#### 4.2 - La matrice de rigidité

On appelle matrice de rigidité d'une structure la matrice  $K$  qui permet d'exprimer l'énergie élastique sous une forme quadratique des déplacements.

$$W = \frac{1}{2} q^t K q \quad (3.20)$$

avec :

$W$  : énergie élastique (appelée parfois énergie de déformation),

$q$  : vecteur des déplacements nodaux.

D'après le premier théorème de Castiglione,

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (3.21)$$

la dérivée partielle de l'énergie élastique, par rapport à une composante de déplacement  $q_i$ , est égale à la composante de force réciproque  $F_i$ .

En considérant la dérivée partielle de (3.20) par rapport à  $q$ , on obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial q} = Kq \quad (3.22)$$

et d'après (3.21) :

$$F = Kq \quad (3.23)$$

avec :

$F$  : vecteur des forces généralisées.

Pour résoudre le problème, il faudra calculer les déplacements  $q_i$  et inverser, par conséquent, la matrice de rigidité

$$q = K^{-1} F \quad (3.24)$$

Les diverses méthodes utilisées pour l'inversion de la matrice de rigidité seront exposées au § 7.3.

Une fois connus les déplacements  $q_i$ , la relation (3.3) donne les déformations et la loi de comportement (3.4) les contraintes.

On rappelle enfin la relation entre l'énergie élastique et l'énergie potentielle pour un champ des déplacements cinématiquement admissible.

$$W(q) = U(q) + \text{travail des forces extérieures}$$

ou sous forme matricielle :

$$U(q) = \frac{1}{2} q^t K q - q^t F \quad (3.25)$$

## 5 - L'APPROCHE DE RITZ. LE PRINCIPE DE BASE DE LA MEF

Cependant, l'approche matricielle décrite au paragraphe précédent n'est applicable qu'à des cas très simples et ne permet pas de traiter les problèmes de la mécanique des milieux continus pour lesquels on ne possède pas de solutions analytiques. Il est donc nécessaire de recourir à des techniques numériques basées sur les méthodes d'approximation. La MEF qui

n'est qu'une de ces techniques, permet d'étendre les possibilités des méthodes matricielles à des structures d'une géométrie complexe, grâce aux méthodes variationnelles. Les performances actuelles des ordinateurs nous donnent la possibilité de résoudre les systèmes linéaires auxquels aboutit la MEF.

### 5.1 - L'approche de RITZ

Parmi les méthodes variationnelles, la méthode de Ritz est la plus généralement utilisée. Sa formulation mathématique, dans le cas du modèle "déplacement", est la suivante, (11) :

La solution exacte du problème variationnel est celle qui appartenant à l'espace des fonctions admissibles satisfaisant les conditions aux limites cinématiques, rend minimale l'énergie potentielle, soit :

$$\delta \{ U(v) \} = 0, \quad \forall \delta v \text{ cinématiquement admissible}$$

avec l'expression suivante pour la fonctionnelle  $U(v)$  :

$$U(v) = \int_{\Omega} U(v, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^m v}{\partial x^m}) d\Omega$$

où  $m$  est l'ordre maximal de dérivation des déplacements apparaissant dans l'expression de l'énergie potentielle. Le cas  $m = 1$  correspond aux problèmes d'élasticité et le cas  $m = 2$  correspond aux problèmes de flexion des poutres.

On cherche donc la meilleure approximation  $\bar{v}(M)$  pour un champ de déplacement cinématiquement admissible. Dans le processus de la méthode de Ritz, le déplacement  $\bar{v}(M)$  d'un point quelconque est exprimé par l'intermédiaire des fonctions de base  $\varphi_i(M)$

$$\bar{v}(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(M) \quad (5.1)$$

On cherche ensuite les fonctions  $\varphi_i(M)$  qui donnent la meilleure approximation. Soit  $U(\bar{v})$  l'énergie potentielle qui correspond à la solution approchée  $\bar{v}(M)$  et  $U(v^*)$  celle qui correspond à la solution exacte  $v^*$ . La propriété fondamentale du minimum absolu de l'énergie potentielle correspondant à la solution exacte du problème par rapport à l'énergie potentielle de tout champ des déplacements cinématiquement admissibles, nous donne :

$$U(\bar{v}) > U(v^*) \quad (5.2)$$

On déduit ainsi que la méthode de Ritz conduit à des modèles plus rigides que la structure réelle.

Il reste à choisir les fonctions de base pour que la méthode converge. On montre qu'elles doivent satisfaire aux conditions de complétude (de manière à pouvoir évaluer correctement l'énergie potentielle) et aux conditions d'admissibilité (conditions de continuité, conditions des déplacements imposés).

## 5.2 - Le principe de base de la méthode des éléments finis

La méthode de Ritz exposée ci-avant ne peut s'appliquer qu'à des problèmes à géométrie très simple. Elle ne peut donc pas être utilisée directement pour des structures complexes à géométrie sophistiquée. Son emploi ne sera possible que si on divise la structure en petits morceaux (les éléments finis) et on applique ensuite l'approche de Ritz pour chacun de ces éléments. On peut donc considérer la MEF comme une méthode de Ritz par morceaux.

Dans la méthode classique de Ritz, on cherche à améliorer l'approximation en augmentant le nombre des fonctions de base admissibles. Dans la MEF, on choisit dès le début la forme des fonctions de base. On cherche ensuite une meilleure approximation en décomposant la structure en morceaux plus petits, (II), (I).

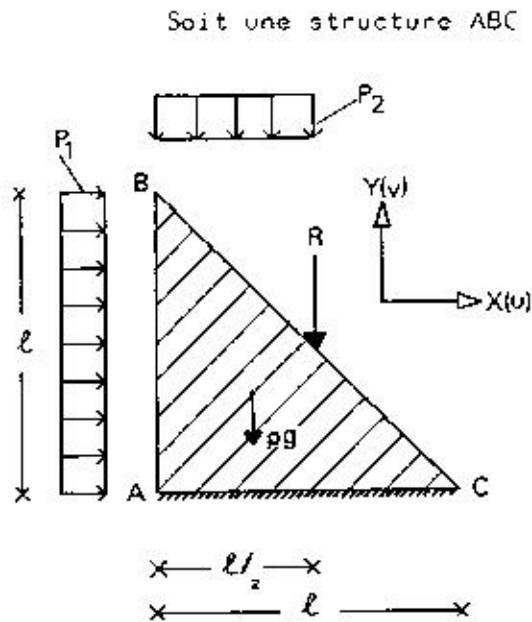
Dans la suite, on étudiera le cas du modèle "déplacement" et on examinera les étapes suivantes :

- la décomposition de la structure en éléments finis,
- l'approximation du champ des déplacements par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation,
- les calculs au niveau élémentaire,
- l'assemblage de la structure,
- la résolution du système  $Kq = F$ .

## 6 - LA DISCRETISATION DE LA STRUCTURE ET LES CALCULS AU NIVEAU ELEMENTAIRE

On va illustrer la présentation des paragraphes précédents par un exemple concret. On examinera d'abord les calculs au niveau élémentaire.

### 6.1 - Un exemple concret



Soit une structure ABC (fig. 6.1) soumise simultanément à une pression latérale  $p_1$  (effets de vent: par exemple), à une charge perpendiculaire uniforme  $p_2$  et à une charge concentrée  $R$ . Pour simplifier, le problème sera traité en déformation plane, donc le tenseur de déformations sera :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La structure est encastrée dans son support AC pour lequel tout déplacement est interdit.

Fig. 6.1 - Un exemple concret en déformation plane

### 6.2 - Le problème approché

On va appliquer à ce problème un modèle "déplacement". Au lieu du problème réel qui comporte un nombre infini des degrés de liberté, on considère un problème approché caractérisé par un nombre fini de degrés de liberté. Alors, l'étude du problème ne sera plus faite dans l'espace  $V$  des déplacements réels (de dimension infinie), mais dans un sous-espace  $V_n$  (de dimension finie) qui prend en compte les conditions aux limites cinématiques. La méthode des éléments finis consiste en un choix particulier des divers sous-espaces  $V_n$ .

Ceci se réalise en pratique par un découpage de la structure en petits morceaux appelés éléments finis. Nous choisissons dans le cas de

notre exemple des éléments finis triangulaires et nous définissons ainsi un maillage de la structure. Les sommets des éléments finis sont appelés les noeuds du maillage.

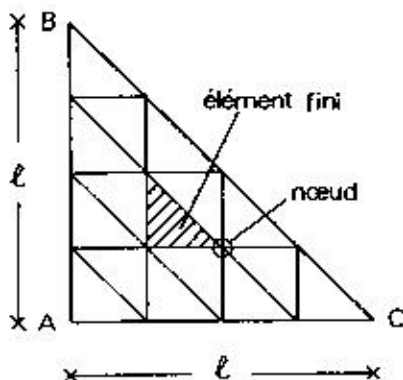


Fig. 6.2 - Le maillage de l'exemple

### 6.3 - Les calculs au niveau élémentaire

On a vu au § 3.2 que pour le modèle "déplacement" la solution se ramène à chercher le minimum de l'énergie potentielle d'un champ cinématiquement admissible :

$$\inf \{ U(v) \mid \vec{v} \in V_n \}$$

avec :

$$U(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega - \int_{S_{\sigma}} g_i v_i dS$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} U(q) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{e}_e^t \mathbf{C}_e \mathbf{e}_e d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_e^t \mathbf{q}_e d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \mathbf{g}_e^t \mathbf{q}_e dS \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{D}_e \mathbf{q}_e)^t \mathbf{C}_e (\mathbf{D}_e \mathbf{q}_e) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_e^t \mathbf{q}_e d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \mathbf{g}_e^t \mathbf{q}_e dS \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q}_e^t \mathbf{D}_e^t \mathbf{C}_e \mathbf{D}_e \mathbf{q}_e d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_e^t \mathbf{q}_e d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \mathbf{g}_e^t \mathbf{q}_e dS \\ &\quad \mathbf{K}_e \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e - \mathbf{q}_e^t \mathbf{F}_e \end{aligned}$$

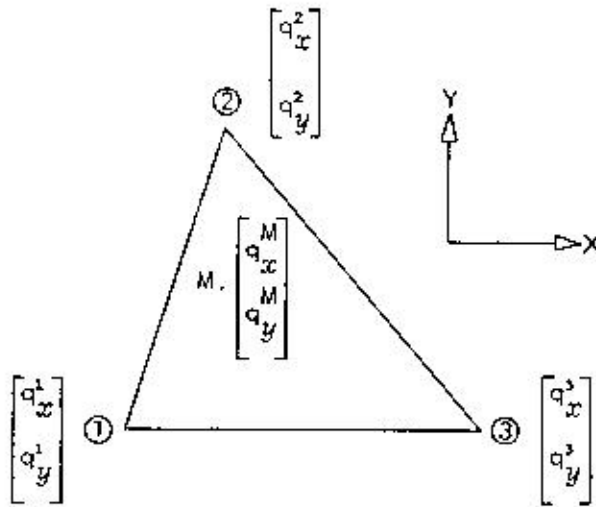
Comme on cherche la valeur minimale de  $U(q)$ , le problème se ramène finalement à résoudre le système linéaire :

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{F}_e$$

Il faudra donc calculer, au niveau de chaque élément, les matrices  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$ . L'indice  $e$  sera utilisé pour des quantités relatives aux éléments. On va calculer les matrices  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{F}_e$  en fonction du vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{q}_e$ .

Appliquons ce processus au cas d'un élément triangulaire de notre exemple. Examinons, d'abord, le déplacement  $q(M)$  d'un point

quelconque  $M$  en fonction des déplacements nodaux (Fig. 6.3). Comme on est en déformations planes, on écrit :



$$q(M) = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x^1 q_x^1 + N_x^2 q_x^2 + N_x^3 q_x^3 \\ N_y^1 q_y^1 + N_y^2 q_y^2 + N_y^3 q_y^3 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

ou :

$$q(M) = \begin{bmatrix} N_x^1 & N_x^2 & N_x^3 & | & N_y^1 & N_y^2 & N_y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x^1 \\ q_x^2 \\ q_x^3 \\ \hline q_y^1 \\ q_y^2 \\ q_y^3 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

ou encore :

$$q(M) = N_e q_e \quad (6.3)$$

Les termes  $N_x^1, N_x^2, N_x^3, N_y^1, N_y^2, N_y^3$  s'appellent fonctions d'interpolation et ont la signification physique suivante :

La fonction d'interpolation  $N_x^i(M)$  représente le déplacement dans l'élément dans le cas où l'on prescrit un déplacement unité au ième noeud selon la direction  $X$ , les autres déplacements nodaux étant nuls.

Le calcul des fonctions d'interpolation sera exposé au sous-paragraphe suivant.



### 6.4 - Le calcul des fonctions d'interpolation

Pour déterminer les fonctions d'interpolation, on approximera le champ des déplacements par des séries polynomiales. Dans le cas des éléments triangulaires, on aura des fonctions affines pour  $q_x$ ,  $q_y$ .

$$q(M) = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 y \\ b_0 + b_1 x + b_2 y \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \hline b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{array} \right] A \quad (6.14)$$

Si on considère comme point M les noeuds ①, ②, ③ de l'élément (Fig. 6.3), on aura :

$$\begin{bmatrix} q_x^1 \\ q_x^2 \\ q_x^3 \\ \hline q_y^1 \\ q_y^2 \\ q_y^3 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \hline b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

ou :

$$q_e = \left[ \begin{array}{c|c} \Psi & 0 \\ \hline 0 & \Psi \end{array} \right] A \quad (6.16)$$

avec :

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

De (6.16), on tire :

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \Psi^{-1} & & 0 & & & \\ \hline & & & & & \\ 0 & & & \Psi^{-1} & & \end{array} \right] q_e \quad (6.18)$$

d'où

$$q(M) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \Psi^{-1} & & 0 & & & \\ \hline & & & & & \\ 0 & & & \Psi^{-1} & & \end{array} \right] q_e \quad (6.19)$$

En identifiant (6.3) et (6.19), on obtient les fonctions d'interpolation cherchées :

$$N_e = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \Psi^{-1} & & 0 & & & \\ \hline & & & & & \\ 0 & & & \Psi^{-1} & & \end{array} \right] \quad (6.20)$$

Le processus indirect utilisé dans notre exemple, pour le calcul des fonctions d'interpolation, peut être appliqué seulement pour les éléments les plus simples. Dans la majorité des cas, on utilise les méthodes directes d'interpolation (polynômes de Lagrange, de Hermite, ...), (14).

Une fois calculées les fonctions d'interpolation, il est facile de bâtir les matrices de rigidité élémentaires. Pour cela, il faudra calculer  $B_e$ . Dans notre exemple, nous avons :

$$\epsilon = Bq_e$$

ou :

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2 \epsilon_{xy} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} q_x \\ q_y \end{array} \right] \end{array} \quad (6.21)$$

(3,1)      (3,2)      (2,1)



On peut exprimer le vecteur  $q_e$  en fonction de  $q$  à l'aide de la matrice de localisation  $L_e$ .

$$q_e = L_e q \quad (7.2)$$

Si l'on suppose que l'énergie potentielle totale de la structure est égale à la somme des énergies potentielles élémentaires, on obtient :

$$U(q) = \sum_e U_e(q) \quad (7.3)$$

$$= \sum_e \left\{ \frac{1}{2} q_e^t k_e q_e - q_e^t F_e \right\} \quad (7.4)$$

$$= \sum_e \left\{ \frac{1}{2} q^t L_e^t K_e L_e q - q^t L_e^t F_e \right\} \quad (7.5)$$

$$= \frac{1}{2} q^t K q - q^t F \quad (7.6)$$

avec :

$$K = \sum_e L_e^t K_e L_e \quad (7.7)$$

$$F = \sum_e L_e^t F_e \quad (7.8)$$

Dans le cas des forces ponctuelles appliquées aux noeuds de la structure (vecteur  $R$ ), l'expression (7.8) devient :

$$F = R + \sum_e L_e^t F_e \quad (7.8.a)$$

Le passage du niveau élémentaire au niveau global se fait à l'aide des relations (7.7) et (7.8) et est appelé assemblage des caractéristiques élémentaires.

Comme on cherche la valeur stationnaire de  $U(q)$ , on aura finalement :

$$F = Kq$$

En pratique, l'assemblage se fait d'après la règle suivante :

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous-matrices de rigidité nodale de chaque élément, les indices de ligne et de colonne correspondant à la numérotation des noeuds de cet élément.

On illustre cette règle par l'exemple suivant (Fig. 7.1, p.167) qui comporte des éléments triangulaires, un quadrilatère et un élément de barre, (8).

## 7.2 - La prise en compte des conditions de déplacements imposés

Pour la prise en compte des conditions des déplacements imposés, la matrice de rigidité de la structure complète, obtenue en assemblant les matrices de rigidité élémentaires, devient singulière. Le processus suivant nous permet d'enlever ces singularités.

Supposons qu'il y ait  $p$  déplacements prescrits ou imposés (connus en général). Il reste  $\ell = n - p$  déplacements inconnus ( $n$  le nombre total des déplacements). On fait la partition suivante :

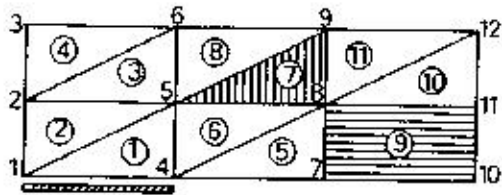
$$q = \begin{bmatrix} q_{\ell} \\ q_p \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{\ell} \\ F_p \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{\ell\ell} & K_{\ell p} \\ K_{p\ell} & K_{pp} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

On aura donc :

$$\begin{bmatrix} F_{\ell} \\ F_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\ell\ell} & K_{\ell p} \\ K_{p\ell} & K_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\ell} \\ q_p \end{bmatrix} \quad (7.12)$$



a. Le maillage

b. Les matrices de rigidité élémentaires

élément de barre 1 4

$$K_e^{bar} = \begin{matrix} & 1 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \end{matrix}$$

élément triangulaire

$$K_e^{tr} = \begin{matrix} & 5 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

quadrilatère

$$K_e^{quad} = \begin{matrix} & 7 & 10 & 11 & 8 \\ \begin{matrix} 7 \\ 10 \\ 11 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \end{bmatrix} \end{matrix}$$

c. assemblage

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \square & x & & \square & x & & & & & & & \\ x & x & x & & x & x & & & & & & \\ & x & x & & & x & & & & & & \\ \square & & & \square & x & & x & x & & & & \\ x & x & & x & \Delta & x & & \Delta & \Delta & & & \\ & x & x & & x & x & & & x & & & \\ & & x & & & & \otimes & \otimes & & \otimes & \otimes & \\ & & & x & \Delta & & \otimes & \Delta & \Delta & \otimes & \otimes & x \\ & & & & \Delta & x & & \Delta & \Delta & & & x \\ & & & & & & \otimes & \otimes & & \otimes & \otimes & \\ & & & & & & & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \\ & & & & & & & & x & x & & x \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fig. 7.1 - La règle de l'assemblage

d'où

$$F_l = K_{ll} q_l + K_{lp} q_p \quad (7.13)$$

$$F_p = K_{pl} q_l + K_{pp} q_p \quad (7.14)$$

On suppose (pour simplifier) que les déplacements connus sont tous nuls ( $q_p = 0$ ). On aura donc :

$$F_l = K_{ll} q_l \quad (7.15)$$

$$F_p = K_{pl} q_l \quad (7.16)$$

La relation (7.15) donne :

$$q_l = K_{ll}^{-1} F_l \quad (7.17)$$

et ainsi la relation (7.16) devient :

$$F_p = K_{pl} K_{ll}^{-1} F_l \quad (7.18)$$

On en déduit donc que pour prendre en compte les conditions des déplacements imposés, il suffit de supprimer, dans la matrice de rigidité, les lignes et les colonnes qui correspondent aux déplacements fixés.

Pour appliquer cette méthode, on utilise assez souvent une technique dite de "pondération". Supposons qu'à un noeud  $i$ , il existe un appui rigide, ce qui se traduit par un déplacement  $v_i$  nul et une réaction  $Y_i$  inconnue. La technique de "pondération" consiste à remplacer au second membre de l'équation  $Kq = F$  le terme correspondant à  $Y_i$  par zéro et de multiplier le terme correspondant à  $v_i$  par un nombre très grand. La résolution du système nous donnera pour  $v_i$  une valeur très petite (pratiquement nulle).

### 7.3 - Les méthodes de résolution des systèmes linéaires

#### 7.3.1 - Présentation générale

L'ordre de systèmes linéaires mis en oeuvre dans les modèles par éléments finis est généralement élevé. Le coût de la résolution numérique de ces systèmes d'équations est une partie significative du coût global d'analyse. On a donc intérêt à réduire ce coût en profitant de la symétrie des matrices de rigidité et de leur faible densité de remplissage. Par ailleurs, les méthodes de résolution doivent être capables de résoudre une grande variété de problèmes.

En analyse statique, on peut classer les méthodes de résolution comme suit :

- méthodes itératives : méthode de Gauss-Seidel, méthodes de relaxation ;
- méthodes directes : méthode d'élimination de Gauss, méthode de Cholesky.

Les méthodes itératives présentent d'excellentes propriétés de convergence pour certains types de problèmes. Il n'en est pas de même pour la grande variété des problèmes que l'on a à résoudre. Pour cela, elles ne sont guère utilisées dans les programmes par éléments finis.

Par contre, les méthodes directes ont une excellente fiabilité et sont applicables à la majorité des problèmes rencontrés.

### 7.3.2 - La méthode d'élimination de Gauss et la méthode de Cholesky

Le principe de la méthode d'élimination de Gauss consiste à une décomposition de la matrice A en deux matrices triangulaires.

$$A = LU \quad (7.19)$$

avec

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

On aura donc :

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} \quad (7.22)$$



On rappelle que l'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire du même type.

Le principe de la méthode de Cholesky repose sur une décomposition de la matrice A comme suit :

$$A = L L^t \quad (7.23)$$

avec

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

La matrice A est supposée symétrique et définie positive.

On aura donc :

$$A^{-1} = (L^t)^{-1} L^{-1} \quad (7.25)$$

$$= (L^{-1})^t L^{-1} \quad (7.26)$$

La résolution d'un système d'équation linéaires par la méthode de Cholesky ou par la méthode de Gauss, nécessite un nombre similaire d'opérations. La seule différence réside pratiquement dans leur mise en oeuvre sur ordinateur.

### 7.3.3 - Les méthodes de mémorisation des grandes matrices

La matrice de rigidité est en général faiblement remplie, la majorité des termes se trouvant au voisinage immédiat de la diagonale. Sa mémorisation se fait en utilisant les techniques suivantes :

- mémorisation par bande ;
- mémorisation par matrices creuses ;
- mémorisation hypermatricielle.

La technique la plus souvent utilisée est la mémorisation par bande. Nous allons illustrer cette technique pour le cas de l'exemple traité au § 7.1. La matrice de rigidité étant symétrique, on conserve seulement la demi-bande non nulle (Fig. 7.2.a) que l'on met sous une forme redressée (Fig. 7.2.b). La largeur de bande de la matrice est définie par l'élément le plus éloigné de la diagonale\*. On peut constater qu'une bonne numérotation du maillage

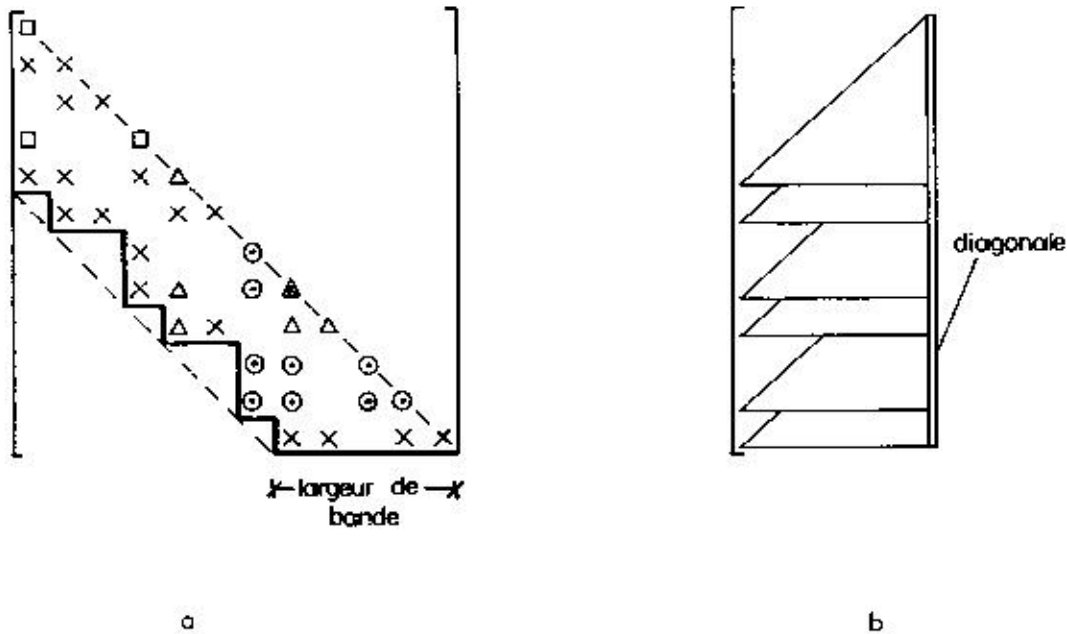


Fig. 7.2 - La technique de mémorisation par bande.

réduit la largeur de bande de la matrice de rigidité. Si, par contre, on avait choisi une mauvaise numérotation, on aurait une matrice de rigidité avec une largeur de bande beaucoup plus grande (Fig. 7.3, page suivante).

\* Elle dépend donc du terme  $\max (i - j)$ ,  $i$  et  $j$  étant les numéros des noeuds appartenant à un même élément.

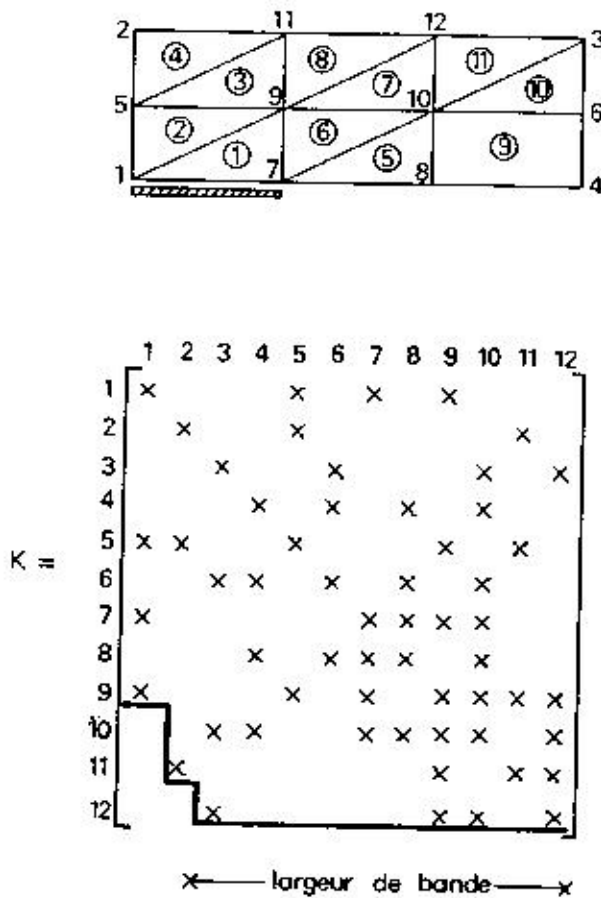


Fig. 7.3 - Exemple d'une mauvaise numérotation du maillage.

On constate donc que l'inconvénient majeur de la technique de mémorisation par bande se situe au niveau de la largeur de bande qui est fonction de l'ordre dans lequel les équations sont traitées et par suite de la numérotation des noeuds du maillage.

## 8 - LES ELEMENTS FINIS USUELS

L'évolution de la MEF a engendré l'utilisation d'une vaste catégorie des types d'éléments : linéaires, planes, tridimensionnels, courbes. Une description des caractéristiques de tous ces éléments déborderait du cadre de cette annexe. Néanmoins, nous considérons utile de présenter les éléments les plus couramment utilisés dans le tableau ci-après :

Le mouvement d'un système élastique conservatif entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  s'effectue de telle sorte que  $\int_{t_1}^{t_2} [T - U(v)] dt$  soit minimal, c'est-à-dire :

$$\delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [T - U(v)] dt \right\}, \quad \forall \delta v_i \neq 0 \quad (9.1)$$

T et U(v) étant l'énergie cinétique et potentielle d'un champ cinématiquement admissible,

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{v}_i \dot{v}_i d\Omega \quad (9.2)$$

$$U(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega - \int_{S_{\sigma}} g_i v_i dS \quad (9.3)$$

## 9.2 - Application de la méthode des éléments finis aux problèmes de la dynamique (dans le cas d'une structure sans amortissement)

### 9.2.1 - Discrétisation de la structure

La structure est découpée en éléments finis de géométrie simple. Dans chaque élément, on définit une approximation des déplacements en fonction des coordonnées de l'espace et de temps :

$$q(x, y, z, t) = N_e(x, y, z) q_e(t) \quad (9.4)$$

avec :

$q(x, y, z, t)$  : vecteur des déplacements en un point quelconque de l'élément

$N_e(x, y, z)$  : matrice d'interpolation

$q_e(t)$  : vecteur des déplacements nodaux.

### 9.2.2 - Formulation élémentaire

Pour chaque élément, les énergies potentielles et cinétiques sont calculées en fonction respectivement des déplacements et des vitesses des déplacements. Pour l'énergie potentielle, l'expression (6.9) reste toujours valable.

$$U_e(q) = \frac{1}{2} q_e^t K_e q_e - q_e^t F_e \quad (9.5)$$

Pour l'énergie cinétique, on aura sous forme matricielle :

$$T_e(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^t M_e \dot{q}_e \quad (9.6)$$

avec :

$M_e$  : matrice des masses de l'élément e

$$M_e = \int_{\Omega} \rho N_e^t N_e d\Omega \quad (9.7)$$

$\rho$  étant la masse volumique.

### 9.2.3 - Formulation globale - Assemblage

Elle consiste à obtenir les équations du mouvement à partir de l'expression des énergies potentielle et cinétique. Si on utilise la notion de matrice de localisation (exposée au § 7.1), on aura :

$$U(q) = \sum_e U_e(q) \quad (9.8)$$

$$= \frac{1}{2} q^t K q - q^t F \quad (9.9)$$

$$T(\dot{q}) = \sum_e T_e(\dot{q}) \quad (9.10)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^t M \dot{q} \quad (9.11)$$

avec :

$K$  : matrice de rigidité de la structure complète

$$K = \sum_e L_e^t K_e L_e \quad (9.12)$$

M : matrice des masses de la structure complète

$$M = \sum_e L_e^t M_e L_e \quad (9.13)$$

Dans le cas envisagé d'une structure sans amortissement, on a à résoudre le système différentiel du deuxième ordre

$$M\ddot{q} + Kq = F(t) \quad (9.14)$$

Pour une étude complète de la MEF dans le cas des problèmes dynamiques, on peut se référer à (3), (4), (8), (10).

## 10 - LES DIVERS DOMAINES D'APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Bien que la MEF fut initialement développée pour l'analyse des structures, son application s'est étendue depuis lors aux domaines les plus divers de la Physique. On peut citer à titre d'exemples la thermique, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, ....

Dans le domaine de Génie Civil, de très nombreux problèmes sont résolus par la MEF. Certaines de ces applications sont mentionnées ci-dessous avec les maillages respectifs, (7), (14) :

- barrages (Fig. 10.1) ;
- pieux de fondation (Fig. 10.2) ;
- ponts (Fig. 10.3) ;
- plaques (Fig. 10.4) ;
- coques (Fig. 10.5) ;
- centrales nucléaires (Fig. 10.6).

Dans le domaine ferroviaire, en dehors de l'étude du comportement de la voie ferrée et de sa fondation, qui fait l'objet de cette thèse, la MEF peut être appliquée à des cas suivants :

- calcul des tunnels ferroviaires. On présente en fig. 10.7 un maillage typique avec une densité d'éléments plus importante lorsqu'on s'approche de la galerie.
- étude à la rupture d'un revêtement de tunnel ancien. La fig. 10.8 indique l'évolution des zones plastiques dans le revêtement quand on augmente le chargement sur la voûte. La rupture a lieu lorsque les zones plastiques situées de part et d'autre du revêtement se rejoignent.

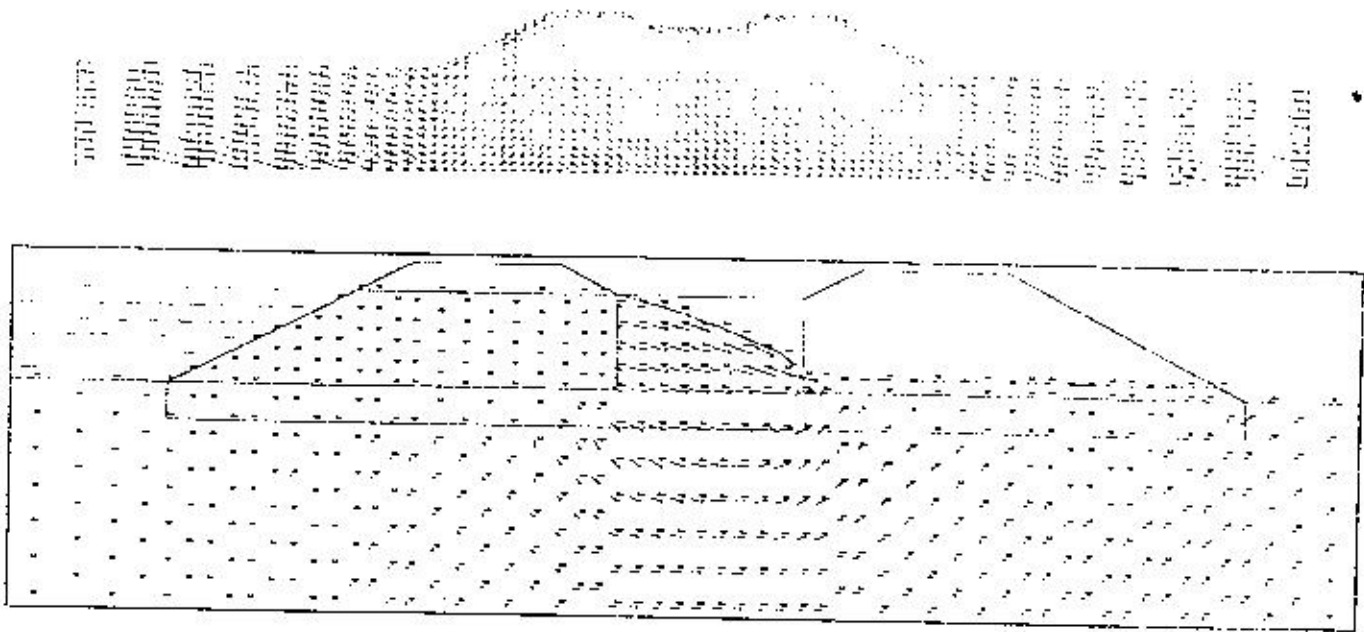


Fig. 10.1 - Application de la MEF aux barrages : maillage, gradients hydrauliques et surface libre

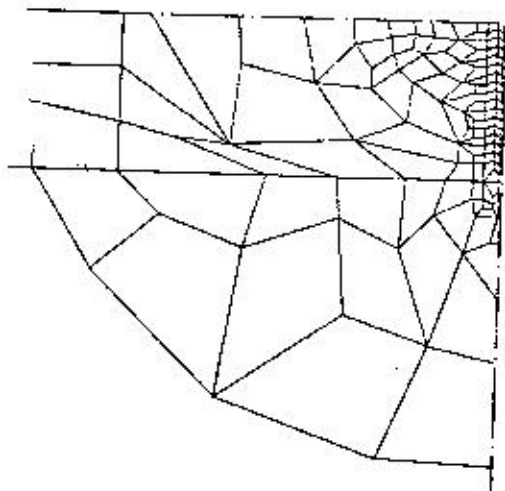


Fig. 10.2 - Application de la MEF à l'étude des pieux : maillage irrégulier d'un pieu de fondation dans un sol stratifié

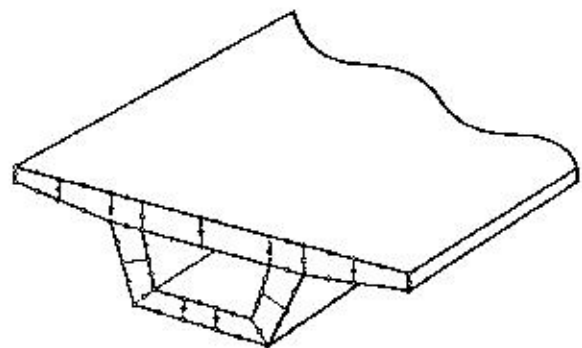


Fig. 10.3 - Application de la MEF à l'étude des ponts : maillage bidimensionnel

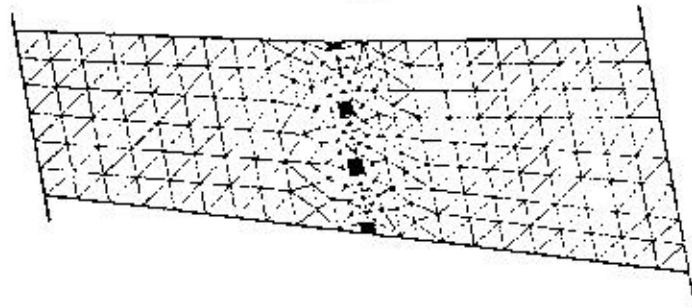


Fig. 10.4 - Application de la MEF aux plaques

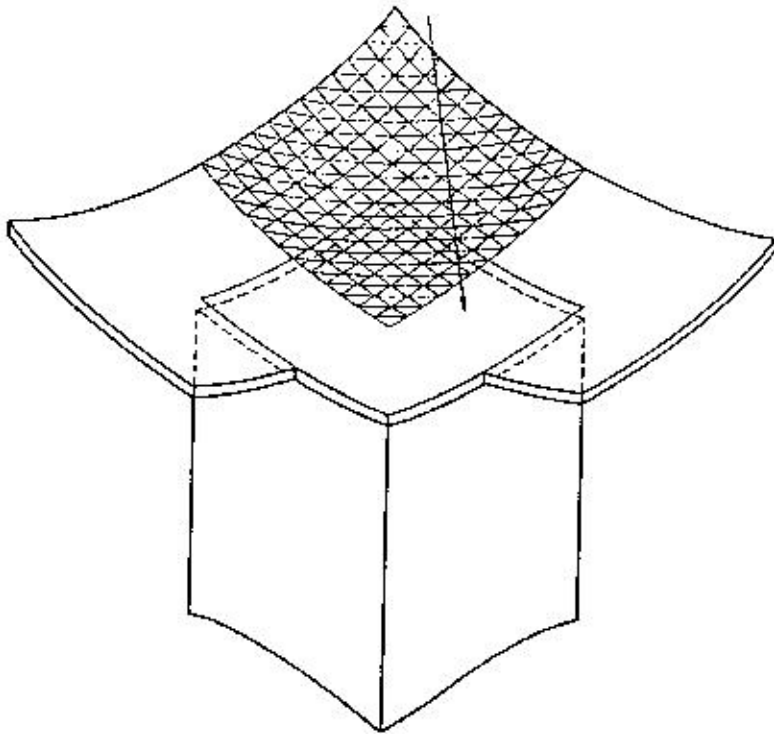


Fig. 10.5 - Application de la MEF aux coques

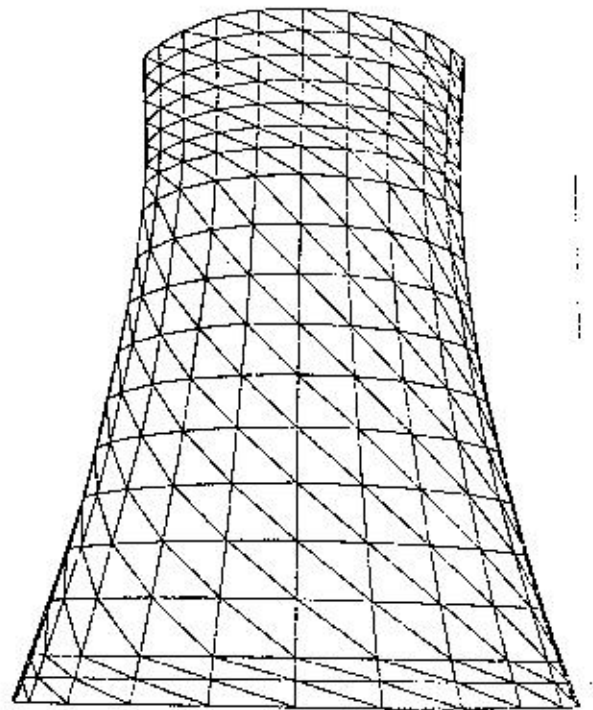


Fig. 10.6 - Etude des centrales nucléaires par la MEF



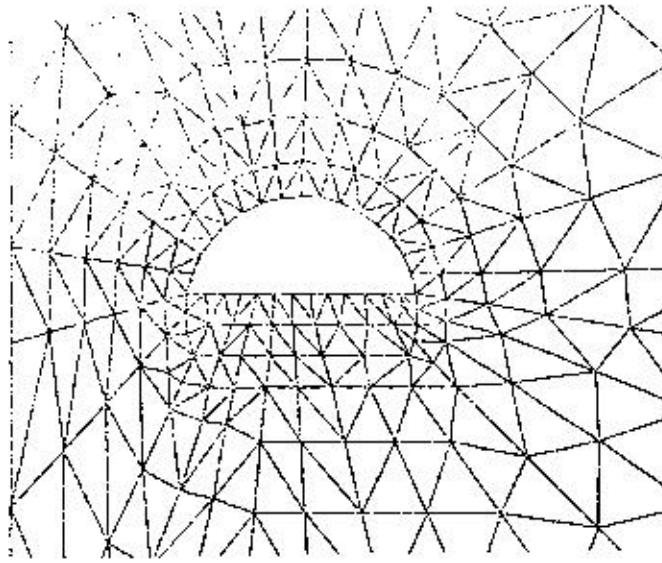
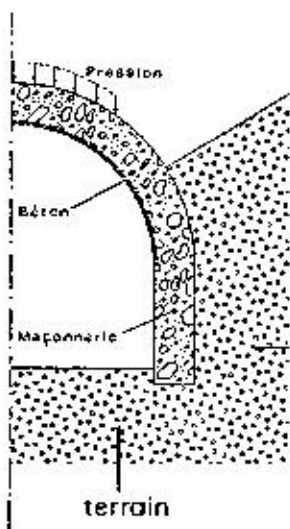
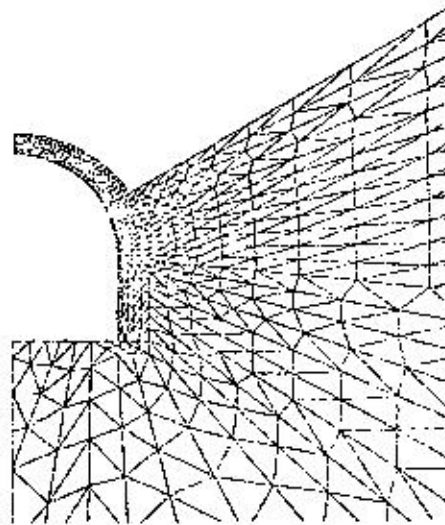


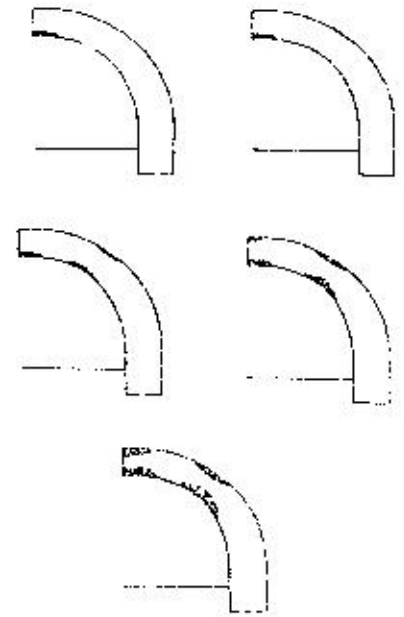
Fig. 10.7 - Application de la MEF au calcul des tunnels ferroviaires



a. Le problème à étudier



b. Le maillage



c. Evolution des zones plastiques lorsqu'on augmente la charge

Fig. 10.8 - Etude par la MEF du revêtement d'un tunnel ancien

11 - REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 - Argyris J., Kelsey S., "Energy Theorems and Structural Analysis", Aircraft Engin., October, 1954.
- 2 - Argyris J., "Matrix Analysis of Three-dimensional Elastic Media-Small and Large Displacements", January, 1965.
- 3 - Clough R., "The Finite Element Method in Structural Mechanics", Stress Analysis, Zienkiewicz and Holister editors, Wiley, 1965.
- 4 - Clough R., Penzien J., "Dynamics of Structures", Mac Graw-Hill, 1975.
- 5 - Frémond M., "Méthodes Variationnelles en Calcul des Structures", ENPC, Paris, 1980.
- 6 - Guellec P., "La Méthode des Eléments Finis Appliquée au Calcul des Massifs et des Structures", Octobre, 1972.
- 7 - Guellec P., Humbert P., Ricard A., "La Méthode des Eléments Finis", Bull. Liaison Labo. P. et Ch. - Janvier - Février 1976.
- 8 - Imbert J., "Analyse des Structures par Elements Finis", Editions Cepadues, Toulouse, 1979.
- 9 - Livesley R., "Matrix Methods in Structural Analysis", Pergamon Press, 1964.
- 10 - Pian T., "Element Stiffness Matrix for Boundary Compatibility and Prescribed Boundary Stresses", Proc. of Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics, AFDL TR 66-80, 1965.
- 11 - Ritz W., "Über Eine Methode zur Lösung Gewissen Variations - Probleme der Mathematischen Physik", J. Reine und Angew. Math., 135, 1909.
- 12 - Turner H., Clough R., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aero. Sci., 23, 1956.

- 13 - Washizu K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, 1968.
- 14 - Zienkiewicz O., "The Finite Element Method", Third Edition, Mac Graw-Hill, 1977.