

LES LOIS DE COMPORTEMENT

NON-LINEAIRES

EN MECANIQUE

TRAITEMENT PAR LA METHODE

DES ELEMENTS FINIS

PAR

VASSILIOS A. PROFILLIDIS

Docteur-Ingénieur

PARIS, 1983

- 1 - Le comportement réversible et non réversible des matériaux ; les effets de plasticité .....
  - 1.1 - Élasticité et réversibilité .....
    - 1.1.1 - Mise en évidence du seuil de plasticité à partir de l'expérience de traction simple .....
    - 1.1.2 - Le domaine d'élasticité .....
  - 1.2 - Le comportement plastique .....
    - 1.2.1 - Le comportement parfaitement plastique .....
    - 1.2.2 - Les critères de plasticité .....
    - 1.2.3 - Le comportement plastique avec écrouissage .....
    - 1.2.4 - La loi de comportement plastique - Le principe de Hill - La loi de Hencky .....
- 2 - La réponse différée à une sollicitation : les effets de viscosité .....
  - 2.1 - Introduction .....
  - 2.2 - Le comportement visqueux linéaire .....
  - 2.3 - Le comportement visco-élastique linéaire .....
  - 2.4 - Le comportement visqueux non-linéaire .....
- 3 - La loi de comportement élasto-plastique. Application dans les modèles par éléments finis .....
  - 3.1 - La loi de comportement élasto-plastique .....
  - 3.2 - Application de la loi de comportement élasto-plastique dans les modèles par éléments finis .....
    - 3.2.1 - Présentation des diverses techniques numériques ...
    - 3.2.2 - La méthode de rigidité variable .....
    - 3.2.3 - La méthode des contraintes initiales .....
    - 3.2.4 - La méthode des déformations initiales .....
    - 3.2.5 - Conclusions sur les méthodes numériques en élasto-plasticité .....

3.3 - Quelques remarques sur les lois associées et non associées en plasticité .....	23
4 - Références bibliographiques .....	24

LES LOIS DE COMPORTEMENT  
NON LINEAIRES EN MECANIQUE

-----  
TRAITEMENT PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS  
-----

1 - LE COMPORTEMENT REVERSIBLE ET NON REVERSIBLE DES MATERIAUX : LES EFFETS DE PLASTICITE

1.1 - Elasticité et réversibilité

1.1.1 - Mise en évidence du seuil de plasticité à partir de l'expérience de traction simple

Examinons le diagramme contrainte-déformation ( $\sigma - \epsilon$ ) d'un échantillon cylindrique de petit diamètre soumis à une force de traction dans le sens de la plus grande dimension (Fig. 1.1) : on réalise ainsi un état de contraintes sensiblement unidimensionnel.

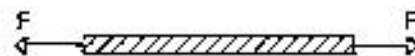


Fig. 1.1 - Echantillon en traction

Selon le matériau constituant l'échantillon, on peut observer deux comportements différents :

- pour un fil de caoutchouc, son comportement est caractérisé par la réversibilité des états ; disparition des déformations avec retrait complet de la charge. La courbe de déchargement coïncide

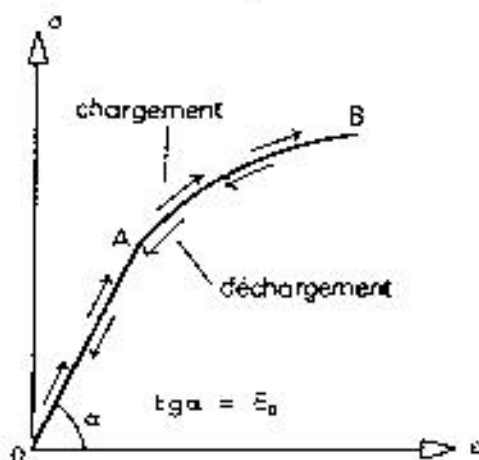


Fig. 1.2 - Le comportement élastique

(qui est non réversible et qui s'accompagne d'une dissipation d'énergie).

avec celle de chargement (Fig. 1.2). On qualifie un tel comportement comme élastique. Le comportement élastique peut être linéaire (partie OA) ou non linéaire (partie AB). Pour un comportement élastique linéaire, le module d'élasticité est constant. Par contre, pour le comportement élastique non linéaire, le module n'est plus constant, mais est fonction de l'état des contraintes. Toutefois, il faut distinguer ici le comportement élastique non linéaire (qui est toujours caractérisé par la réversibilité et auquel il n'y a aucune dissipation d'énergie) du comportement plastique

- dans le cas d'un métal, l'expérience physique a montré que par augmentation de la force de traction  $F$ , on arrive à une certaine contrainte-seuil  $\sigma_0$ , ou-delà de laquelle le comportement n'est plus réversible. Il n'y a plus coïncidence entre les courbes de chargement (OAB) et de déchargement (BC). Des déformations résiduelles apparaissent après suppression de la force  $F$ . La contrainte-seuil  $\sigma_0$  est appelée seuil de plasticité initial et la déformation résiduelle déformation permanente.

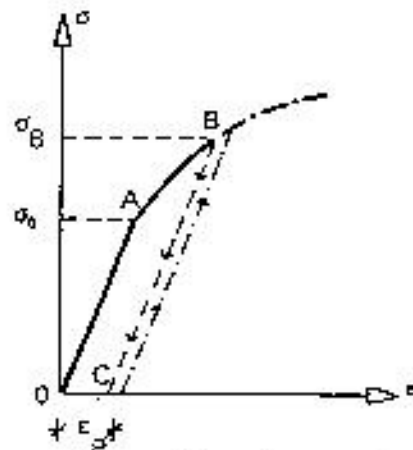


Fig. 1.3 - Le seuil de plasticité

Si, après avoir subi la déformation permanente, on charge de nouveau l'échantillon de métal, tant que la contrainte reste inférieure à  $\sigma_B$ , on suit le même trajet CB avec celui de déchargement et sur ce trajet le comportement reste réversible. Mais lorsqu'on dépasse  $\sigma_B$ , le comportement devient de nouveau irréversible. On appelle  $\sigma_B$  seuil de plasticité actuel.

Cette variation de la contrainte-seuil est appelée écrouissage.

### 1.1.2 - Le domaine d'élasticité

La sollicitation unidimensionnelle n'est qu'un cas particulier des sollicitations que peut subir un milieu continu tridimensionnel. Le seuil de plasticité initial devient alors, dans l'espace des

contraintes principales, une surface appelée frontière d'élasticité initiale (Fig. 1.4) ; comme la contrainte-seuil, cette surface dépend de l'histoire de chargement.

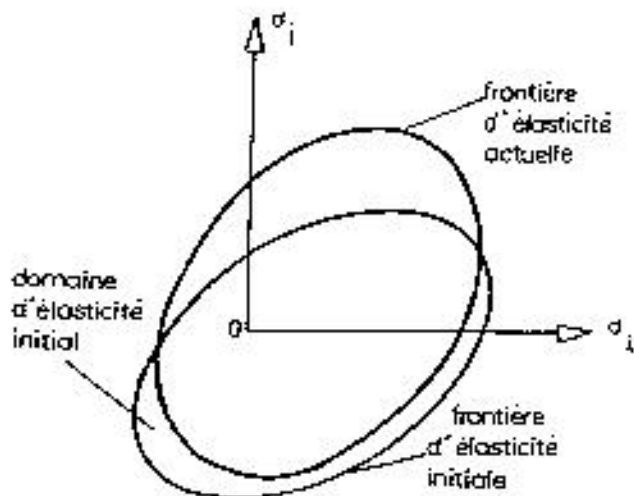


Fig. 1.4 - Le domaine d'élasticité

A l'intérieur du domaine d'élasticité initial, le comportement reste réversible. Pour le milieu tridimensionnel, la loi de comportement en élasticité linéaire s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{tr} \epsilon \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (\sigma_{ij} \text{ en fonction de } \epsilon_{ij}) \quad (1.1)$$

ou

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \sigma \delta_{ij} \quad (\epsilon_{ij} \text{ en fonction de } \sigma_{ij}) \quad (1.2)$$

avec  $\lambda, \mu$  les coefficients de Lamé,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (1.3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.4)$$

et

$$\operatorname{tr} \epsilon = \epsilon_{ii} = \epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

Par décomposition du tenseur des contraintes à une partie sphérique et une partie déviatorique ( $s_{ij}$ ), on aura :

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij}}_{\text{partie sphérique}} + \underbrace{s_{ij}}_{\text{partie déviatorique}} \quad (1.5)$$

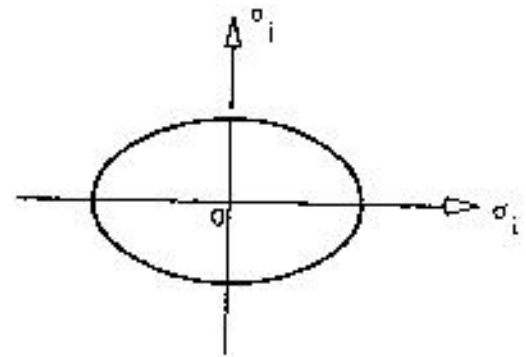
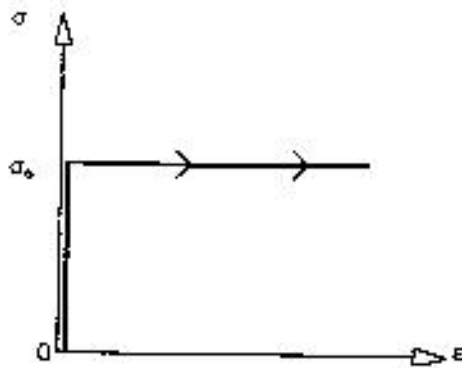
Pour le tenseur des déformations, on écrit une relation similaire :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\epsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} + e_{ij} \quad (1.6)$$

## 1.2 - Le comportement plastique

### 1.2.1 - le comportement parfaitement plastique

Une idéalisation très utile en plasticité est le comportement parfaitement plastique. Il peut se formuler dans le cas de la



a. Le diagramme  $\sigma - \epsilon_p$   
(sollicitation unidimensionnelle)

b. Le domaine d'élasticité  
(sollicitation tridimensionnelle)

Fig. 1.5 - Le matériau parfaitement plastique

sollicitation unidimensionnelle (Fig. 1.5.a), comme suit :

$$\sigma < \sigma_0 : \epsilon_p = 0$$

(1.7)

$$\sigma = \sigma_0 : \epsilon_p = \text{arbitraire}$$

L'élasto-plasticité parfaite implique que la frontière d'élasticité est fixe ; le domaine d'élasticité actuel pour tout état de sollicitation coïncide avec le domaine d'élasticité initial (Fig. 1.5.b).

### 1.2.2 - Les critères de plasticité

Nous allons maintenant examiner les critères qui indiquent pour quel niveau des contraintes on franchit le domaine d'élasticité initial. Plusieurs critères ont été proposés (chacun pour répondre à une certaine catégorie des problèmes). Pour définir les critères de plasticité, on utilise une fonction scalaire  $f(\sigma)$ , appelée fonction de charge, et telle que :

$f(\sigma) < 0$  corresponde à l'intérieur du domaine d'élasticité

$f(\sigma) = 0$  corresponde à la frontière

(1.8)

$f(\sigma) > 0$  corresponde à l'extérieur.

La condition  $f(\sigma) < 0$  constitue le critère d'élasticité et la condition  $f(\sigma) = 0$  celui de plasticité.

On expose ci-après les principaux critères de plasticité avec les fonctions de charge correspondantes. Pour tous ces critères, on fait l'hypothèse que les domaines d'élasticité initial est actuel sont convexes et on ne s'intéresse qu'aux matériaux isotropes. Ceci nous permet d'exprimer la fonction de charge  $f(\sigma)$  comme étant fonction des trois contraintes principales. On fait également l'hypothèse de petites déformations.

### Critère de Tresca

Ce critère, introduit par Tresca en 1864, a comme fonction de charge :

$$f(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_0 \quad (1.9)$$

avec :

$\sigma_1, \sigma_3$  : les contraintes principales extrêmes,

$\sigma_0$  : la limite d'élasticité en traction (la limite en cisssion étant  $\frac{\sigma_0}{2}$ ).

Dans l'espace des contraintes principales, le domaine d'élasticité du matériau est un prisme hexagonal régulier (Fig. 1.6).

### Critère de Von Mises

Introduit, ce critère, en 1912 par Von Mises, a comme fonction de charge :

$$f(\sigma) = J_2^{1/2} - k \quad (1.10)$$

avec :

$k$  : limite d'élasticité en cisssion (la limite en traction étant égale à  $k\sqrt{3}$ ).

$J_2$  : deuxième invariant du déviateur des contraintes,

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}$$

L'expression du critère de von Mises en fonction des trois contraintes principales est la suivante :

$$f(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{8} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} - k \quad (1.11)$$



Dans l'espace des contraintes principales, le domaine d'élasticité du matériau est un cylindre circulaire (Fig. 1.6, 1.7).

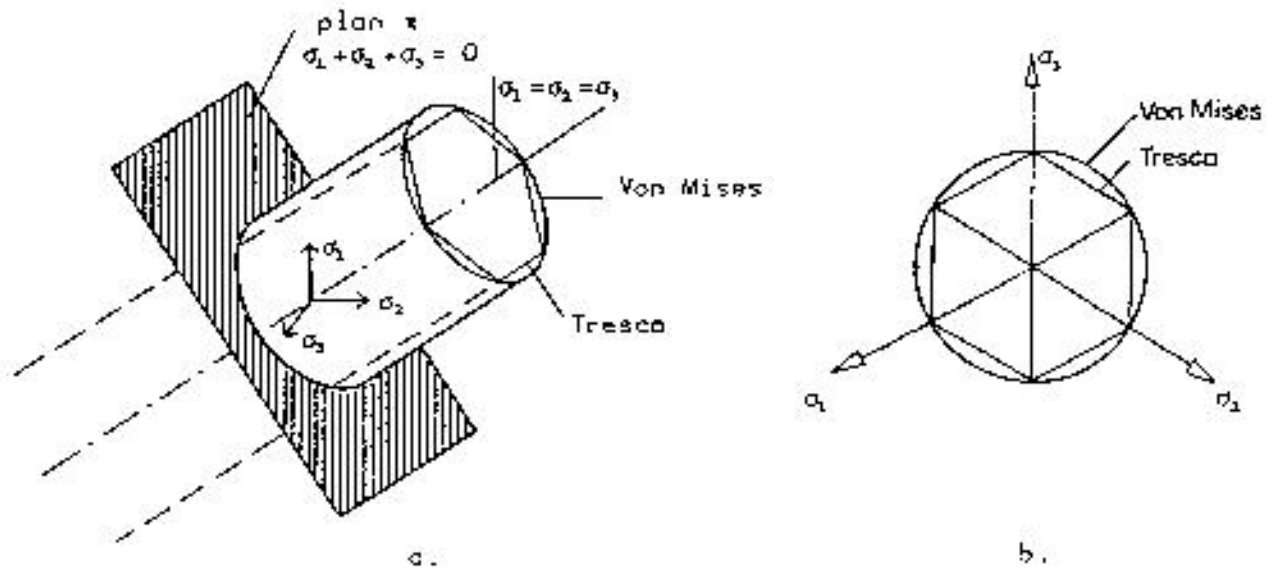


Fig. 1.6 - Représentation géométrique des critères de Von Mises et de Tresca : a. dans l'espace des contraintes principales, b. dans le plan  $\pi$  ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ).

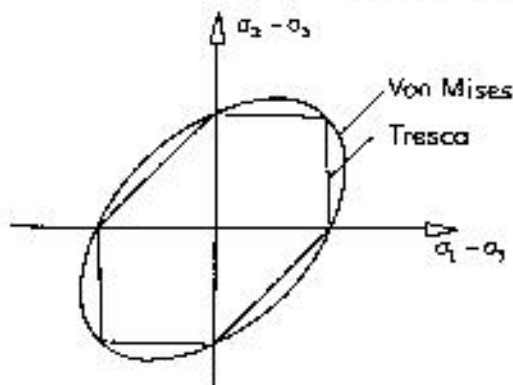


Fig. 1.7 - Représentation géométrique des critères de Von Mises et Tresca dans le plan ( $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3$ ).

On constate que le critère de Von Mises, comme celui de Tresca, n'est fonction que du déviateur des contraintes et est indépendant de la partie sphérique.

Par ailleurs, une étude comparative de ces deux critères indique que le critère de plasticité initial pour les métaux serait plus proche du critère de Von Mises que de celui de Tresca.

1773).

(1.12)

(1.13)

(1.14)

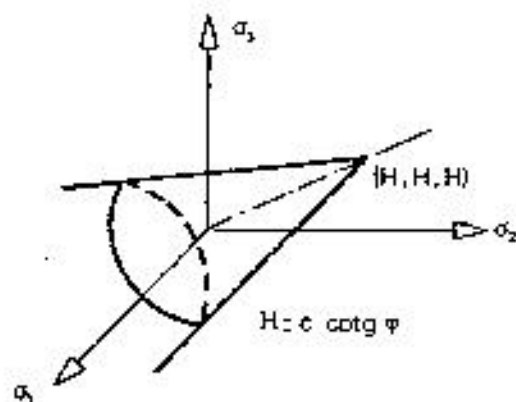
de "resca",  
à une  
maintenant  
fonction  
il en  
que, d'une  
tion de  
de la  
du  
contraintes,  
que le  
Coulomb  
de la  
la contrainte  
remédicaine.

d'élasti-

ELIX

### Critère de Drucker-Prager

Drucker et Prager (1952) ont proposé un critère apparenté à celui de Von Mises, de la même manière que le critère de Coulomb est apparenté à celui de Tresca.



Le domaine d'élasticité est maintenant représenté par un cône de révolution ; la frontière d'élasticité est donc plus régulière, ce qui présente de nombreux avantages, principalement du point de vue numérique.

Fig. 1.9 - Représentation géométrique du critère de Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales.

La fonction de charge du critère de Drucker-Prager s'exprime comme suit :

$$f(\sigma) = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - k \quad (1.14)$$

avec :

$$I_1 = \text{tr } \sigma = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

$\alpha$  : constante positive.

On peut choisir les paramètres  $\alpha$  et  $k$  de telle façon que la surface du domaine d'élasticité du critère de Drucker-Prager soit circonscrite ou inscrite à celle du critère de Mohr-Coulomb. Dans la majorité des cas, la seconde hypothèse est retenue et les paramètres ci-avant deviennent :

$$\alpha = \frac{\text{tg } \varphi}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \varphi}} \quad (1.15)$$

$$k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \varphi}}$$

Le critère de Drucker-Prager est surtout employé pour les sols.

### Critère parabolique

Il a comme fonction de charge :

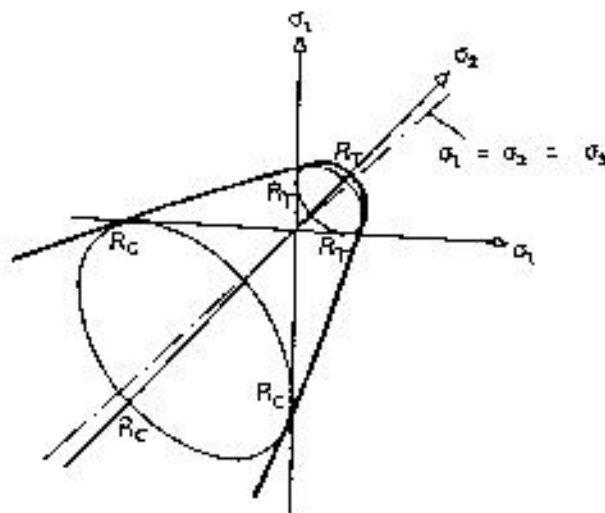
$$f(\sigma) = J_2 + \frac{1}{3} (R_C - R_T) I_1 - \frac{1}{3} R_C R_T \quad (1.17)$$

avec :

$R_C$  : résistance à la compression

$R_T$  : résistance à la traction.

Le domaine d'élasticité est un paraboloïde de révolution.



Ce critère est surtout appliqué pour les bétons.

Fig. 1.10 - Représentation géométrique du critère parabolique dans l'espace des contraintes principales.

### 1.2.3 - Le comportement plastique avec écrouissage

On a vu en 1.2.1 que dans le cas du matériau parfaitement plastique, lorsque la contrainte-seuil est atteinte, il en résulte une déformation plastique arbitraire, qui peut (si elle est suffisamment importante) provoquer la rupture. Par contre, pour le matériau écrouissable, le chargement peut être poursuivi au-delà de la contrainte-seuil  $\sigma_s$ .

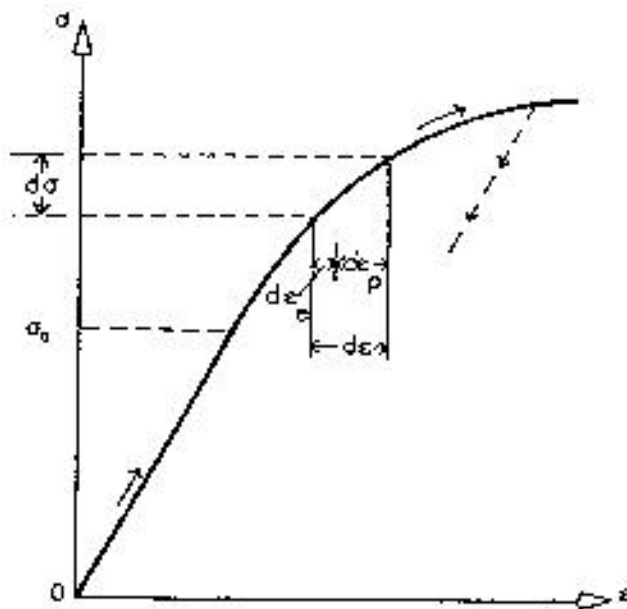


Fig. 1.11 - Le comportement plastique avec écrouissage ; cas de la sollicitation uniaxiale.

Pour le matériau plastique écrouissable, il n'y a plus correspondance biunivoque entre les contraintes et les déformations (comme dans le cas de l'élasticité). L'état de déformations ne peut être déterminé par la seule connaissance de la sollicitation. Il est nécessaire de connaître l'état initial et tout le trajet de la charge suivi pour aboutir à la sollicitation actuelle.

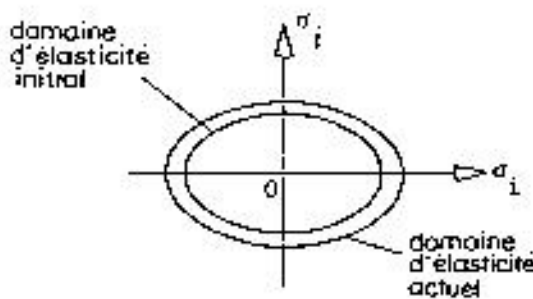
Le comportement plastique avec écrouissage implique donc, pour les critères de plasticité exposés ci-avant, que le paramètre  $k$  n'est plus constant, mais dépend des déformations permanentes,  
 $k = k(\varepsilon_p)$ .

L'écrouissage peut être :

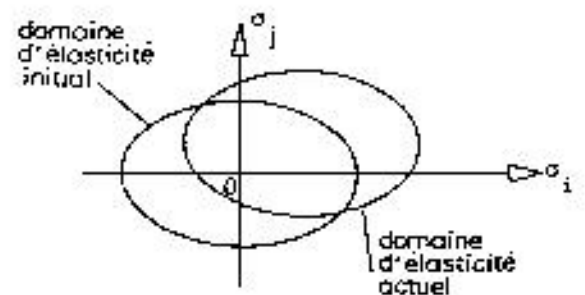
isotrope : il dépend d'un paramètre scalaire unique ; le domaine d'élasticité se transforme par homothétie de centre 0 (Fig. 1.12.a).

cinématique : il dépend d'un paramètre tensoriel. Le domaine d'élasticité se transforme par translations (Fig. 1.12.b).

Dans la suite, on ne s'occupe que de l'écrouissage isotrope.



a. Écrouissage isotrope



b. Écrouissage cinématique

Fig. 1.12 - Schématisation de l'écrouissage isotrope et de l'écrouissage cinématique.

### 1.2.4 - La loi de comportement plastique - Le principe de Hill - La loi de Hencky

Jusqu'à maintenant, on a cherché la sollicitation-seuil au-delà de laquelle on entre dans le domaine de plasticité. Dans ce qui suit, on étudie la règle régissant le comportement plastique.

Un principe auquel on fait souvent appel en plasticité est le principe de travail plastique maximal de Hill (1950) qui s'énonce comme suit :

Soit dans un matériau deux tenseurs  $\sigma_{ij}$  et  $\sigma_{ij}^*$  de contraintes non extérieures au domaine d'élasticité actuel ; si on note par  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  la vitesse de déformation plastique correspondante à  $\sigma_{ij}$ , on aura :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (1.18)$$

On peut démontrer, (11), que le principe de Hill :

- impose la convexité du domaine d'élasticité ;
- lorsque  $\sigma_{ij}$  correspond à un point situé à la frontière du domaine d'élasticité,  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  a la direction de la normale extérieure (Fig. 1.13).

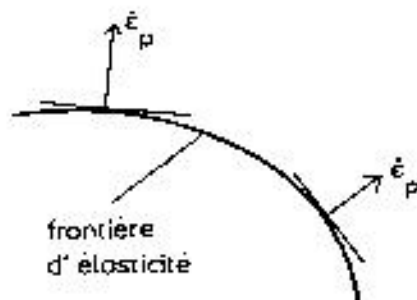


Fig. 1.13 - Le principe de normalité (Hill)

Le principe de Hill nous permet d'écrire la loi de comportement plastique (appelée parfois règle d'écoulement) pour les points réguliers de la frontière d'élasticité sous la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (1.19)$$

avec  $f$  : fonction de charge du matériau.

Si l'on considère le cas du matériau parfaitement plastique,  $\lambda$  est un scalaire positif,  $\lambda \geq 0$ . Dans le cas du matériau plastique écrouissable (qui se trouve dans un état d'écrouissage  $E$ ), on peut démontrer, (11), que :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{M(\sigma_{ij}, E)} \dot{f}_E \quad (1.20)$$

avec :

$M(\sigma_{ij}, E)$  : module d'écrouissage, scalaire positif, fonction de  $\sigma_{ij}$  et  $E$ .

Une autre loi de comportement qui est souvent utilisée en plasticité est celle proposée par Hencky, (7). Cette loi n'est valable que lorsque les déformations sont petites et, par conséquent, leurs carrés peuvent être négligés. Sa formulation est la suivante :

$$\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad (1.21)$$

L'hypothèse de normalité est toujours retenue, mais implicitement la loi de Hencky fait l'hypothèse que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  est d'une direction fixe ; dans ce cas-là, la loi de Hill peut être remplacée par celle de Hencky.

Pour un chargement continu et de petites déformations plastiques, la loi (1.21) peut être considérée comme une bonne approximation de la loi (1.19). D'ailleurs, ceci a été vérifié par certaines constatations empiriques. Toutefois, il y a des cas (tel que le comportement des métaux) où cette loi ne s'applique pas, (7).

L'utilisation de la loi de Hencky se révèle d'une grande importance pour la réalisation numérique d'un modèle élasto-plastique. En effet, elle permet d'établir des relations globales concernant les déformations plastiques  $\epsilon_{ij}^p$  et de surmonter ainsi la difficulté d'intégration par rapport au temps qu'engendre la loi de Hill. Une détermination théorique du pas de temps  $\Delta t$  à prendre en compte est actuellement impossible a priori, ce choix étant effectué d'après des essais successifs, (14).

## 2 - LA RÉPONSE DIFFÉRÉE A UNE SOLLICITATION : LES EFFETS DE VISCOSITÉ

### 2.1 - Introduction

Dans la plupart des problèmes de la Mécanique, on peut considérer que la réponse des matériaux à une sollicitation se fait de façon instantanée. Cependant, certains matériaux subissent en plus de la réponse instantanée une réponse différée dans le temps. Le matériau conserve une certaine mémoire de son histoire antérieure et on appelle un tel comportement héréditaire.

On distingue principalement dans les comportements héréditaires le fluage et la relaxation. Le fluage est l'évolution des déformations dans le temps à contrainte constante. La relaxation est l'évolution des contraintes dans le temps à déformation constante.

Si on considère comme facteur d'hérédité le temps, on obtient alors le comportement visqueux.

### 2.2 - Le comportement visqueux linéaire

C'est l'idéalisation la plus simple du matériau visqueux. Sa loi de comportement, pour une sollicitation unidimensionnelle, s'écrit :

$$\frac{d\varepsilon_v}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.1)$$

ou :

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_v \quad (2.2)$$

avec :

$\eta$  : coefficient de viscosité.

### 2.3 - Le comportement visco-élastique linéaire

Pour une contrainte donnée, la déformation est la somme d'une partie instantanée (élastique) et d'une partie différée (visqueuse). On écrit alors :

$$\varepsilon_{\text{tot}} = \varepsilon_e + \varepsilon_v \quad (2.3)$$

Dans les figures 2.1 et 2.2, on schématise les courbes de fluage et de relaxation pour le matériau visco-élastique.



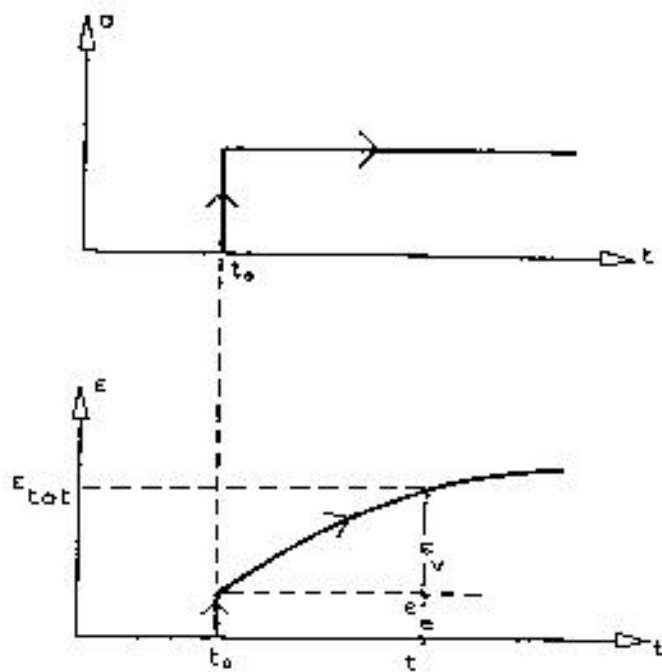


Fig. 2.1 - Le comportement visco-élastique : la courbe de fluage

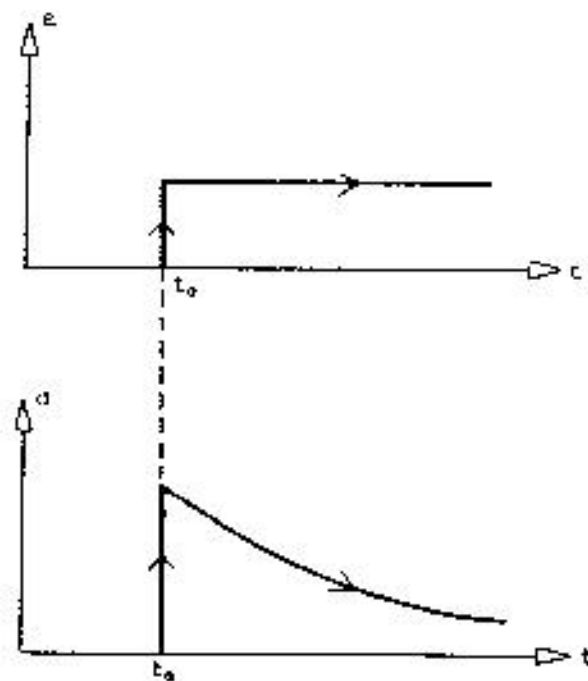
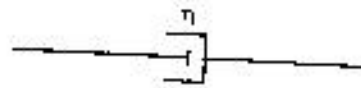
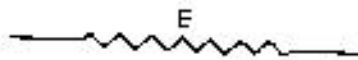


Fig. 2.2 - Le comportement visco-élastique : la courbe de relaxation

Pour le matériau visco-élastique linéaire et dans le cas d'une sollicitation unidimensionnelle, deux idéalizations très utiles sont les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt. Les conventions suivantes sont adoptées :



représente la viscosité



représente l'élasticité instantanée.

Avec ces conventions, la schématisation et la formulation des modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt peuvent être faites comme suit :

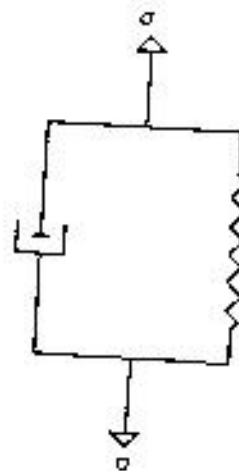


a. modèle de Maxwell

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v$$

(2.4)

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_e + \epsilon_v$$



b. modèle de Kelvin-Voigt

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_e = \epsilon_v$$

(2.5)

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v$$

Fig. 2.3 - Les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt

## 2.4 - Le comportement visqueux non linéaire

Pour une sollicitation unidimensionnelle, sa loi de comportement s'écrit :

$$\frac{d\epsilon_v}{dt} = \left( \frac{\sigma}{\eta} \right)^n \quad (2.6)$$

l'exposant n pouvant aller jusqu'à 10 pour certains problèmes.

## 3 - LA LOI DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE. APPLICATION DANS LES MODELES PAR ELEMENTS FINIS

### 3.1 - La loi de comportement élasto-plastique

C'est une loi de comportement qui donne des résultats très satisfaisants pour un grand nombre des problèmes de la Mécanique. Sa formulation est la suivante .

$$\text{lorsque } f(\sigma) < 0 : \epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_e \quad (3.1)$$

lorsque  $f(\sigma) \geq 0$  :

$$\epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_e + \epsilon_p$$

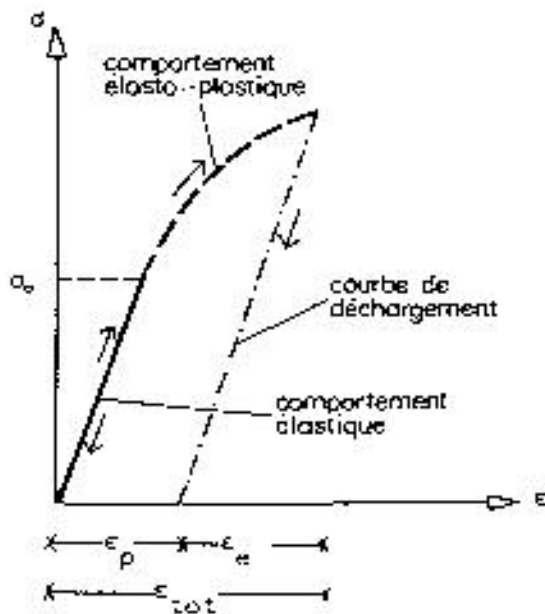


Fig. 3.1 - Schématisation du comportement élasto-plastique ; cas de la sollicitation unidimensionnelle.

La loi de comportement élasto-plastique simule de façon satisfaisante le comportement irréversible des divers matériaux, pour lesquels les effets différés n'interviennent pas.

### 3.2 - Application de la loi de comportement élasto-plastique dans les modèles par éléments finis

#### 3.2.1 - Présentation des diverses techniques numériques

En annexe 1, la méthode des éléments finis a été exposée pour le cas d'une loi de comportement élastique. Nous allons étudier maintenant comment on peut appliquer une loi de comportement élasto-plastique, tout en conservant les techniques exposées en annexe 1.

Il convient, d'abord, de souligner que dans un modèle par éléments finis en élasto-plasticité, la solution n'est plus unique. En effet, lorsqu'on arrive à trouver une solution, celle-ci ne correspond pas forcément à la solution recherchée. Bien au contraire ! On arrive parfois à des solutions certes numériquement parfaites, mais qui sont loin de toute signification physique.

On a vu que dans le cas d'un modèle "déplacements" avec une loi de comportement élastique, le problème se ramène à chercher la solution du système linéaire.

$$F = Kq \quad (3.1)$$

La question qui se pose est de savoir comment doit être modifié ce système linéaire pour prendre en compte une loi de comportement élasto-plastique.

Pour ce faire, nous allons opérer au système linéaire (3.1) des "réajustements" par un procédé itératif de façon à tenir compte de la loi de comportement élasto-plastique. A priori, on peut "jouer" sur chacune des trois quantités  $K$ ,  $F$ ,  $q$ , d'où les trois méthodes possibles :

- méthode de rigidité variable, si à chaque itération la matrice de rigidité  $K$  est modifiée,
- méthode des contraintes initiales, si à chaque itération le vecteur  $F$  est modifié,
- méthode des déformations initiales, si à chaque itération le vecteur  $q$  est modifié.

### 3.2.2 - La méthode de rigidité variable

Cette méthode consiste à inverser à chaque itération la matrice de rigidité :

$$q_1 = k_1^{-1} F$$

$$q_2 = K_2^{-1} F$$

⋮

$$q_n = K_n^{-1} F$$

Le processus itératif est arrêté lorsqu'on n'observe plus de changements significatifs dans les valeurs des déplacements.

Cette méthode présente un grand désavantage du fait qu'il faut inverser à chaque itération la matrice de rigidité, ce qui se révèle extrêmement coûteux. La convergence de cette méthode n'est pas démontrée théoriquement. (14).

### 3.2.3 - La méthode des contraintes initiales

Dans cette méthode, la matrice de rigidité n'est inversée qu'une seule fois, lors de la première itération :

$$q_1 = K_0^{-1} F_1 \quad (3.2)$$

Le vecteur  $F_1$  correspond aux charges appliquées à la structure.

Les résultats de cette première itération correspondent à la solution élastique du problème. A chaque itération suivante des efforts de rééquilibrage sont calculés (en modifiant le vecteur  $F$ ) afin de s'approcher de la loi de comportement élasto-plastique.

$$q_2 = K_0^{-1} F_2$$

$$q_3 = K_0^{-1} F_3 \quad (3.3)$$

⋮

$$q_n = K_0^{-1} F_n$$

Le processus itératif est arrêté lorsqu'une précision satisfaisante est atteinte.

Cependant, il est plus pratique de calculer les variations de  $F$  dus aux variations de contraintes  $[\Delta \sigma^{(n)}]$ , (contraintes initiales ou d'équilibrage), qu'on ajoute à chaque itération. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta q_2 &= K_0^{-1} \Delta F_2 \\ \Delta q_3 &= K_0^{-1} \Delta F_3 \\ &\vdots \\ \Delta q_n &= K_0^{-1} \Delta F_n \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ce dernier processus est préférable pour des raisons numériques. Il présente de plus une signification physique bien précise. En effet, on peut avoir à chaque itération une estimation de la différence entre la valeur de la solution élasto-plastique (résultats de la n-ème itération) et celle de la solution élastique (résultats de la première itération) du problème. La quantité  $\Delta F_n$  représente la force

non équilibrée pendant la dernière itération et donne une mesure de l'approximation réalisée.

Le processus de la méthode des contraintes initiales est schématisé à la figure 3.2.

Nous nous proposons maintenant d'étudier la formulation mathématique de la méthode des contraintes initiales, telle qu'elle a été appliquée dans notre modèle par éléments finis.

La matrice de rigidité est inversée pendant la première itération.

A partir des déplacements obtenus lors de cette première itération, les contraintes  $[\sigma_1]$  sont calculées\*, en utilisant

une loi de comportement élastique. Ces contraintes  $[\sigma_1]$  sont ensuite reportées dans l'expression du critère de plasticité et :

- si  $F([\sigma_1]) < 0$ , le point considéré se trouve à l'intérieur du domaine d'élasticité et la solution réelle correspond donc bien à une loi de comportement élastique ;

\* Les termes entre crochets représentent des quantités matricielles. On utilise ici cette expression pour des raisons de simplicité.

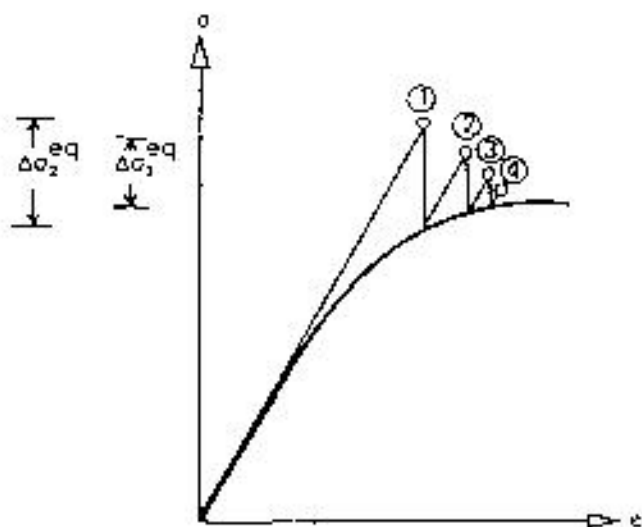


Fig. 3.2 - La méthode des contraintes initiales

- si  $f([\sigma_i]) \geq 0$ , le point considéré ne se trouve plus à l'intérieur du domaine d'élasticité : la solution réelle correspond à une loi de comportement élasto-plastique. Le processus de la méthode des contraintes initiales consiste à s'approcher de la solution élasto-plastique du problème en partant de la solution élastique.

Soit  $[\Delta \sigma_i^{eq}]$  les contraintes initiales nécessaires à l'itération  $i$  pour se ramener à la loi de comportement élasto-plastique. Le calcul effectué à chaque itération est un calcul élastique. On aura donc :

$$[\Delta \epsilon_i^p] = \frac{[\Delta \sigma_i^{eq}]}{[E]} \quad (3.5)$$

$[E]$  étant la matrice d'élasticité.

Par ailleurs, la loi de comportement plastique (1.19) dans une méthode itérative incrémentale est remplacée par :

$$[\Delta \epsilon_i^p] = \lambda_i \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]_i \quad (3.6)$$

Des relations (3.5) et (3.6) nous déduisons :

$$[\Delta \sigma_i^{eq}] = \lambda_i [E] \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]_i \quad (3.7)$$

Pour calculer  $\lambda_i$ , un développement du critère de plasticité est utilisé :

$$f(\sigma_i - \Delta \sigma_i^{eq}) = f(\sigma_i) - \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1^{eq} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2^{eq} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \Delta \sigma_3^{eq} \right) \quad (3.8)$$

$$\text{ou } f(\sigma_i - \Delta \sigma_i^{eq}) = f(\sigma_i) - \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]_i^t \cdot [\Delta \sigma_i^{eq}] \quad (3.8.a)$$

$$\text{ou } f(\sigma_i - \Delta \sigma_i^{eq}) = f(\sigma_i) - \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]_i^t \cdot \lambda_i [E]_i \frac{\partial f}{\partial \sigma}_i$$

$$\text{ou } f(\sigma_i - \Delta \sigma_i^{eq}) = f(\sigma_i) - \lambda_i \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]_i^t \cdot [E] \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]_i \quad (3.9)$$

Nous cherchons à trouver une valeur du critère égale à zéro.

$$f(\sigma_i - \Delta \sigma_i^{eq}) = 0 \quad (3.10)$$

d'où :

$$\lambda_i = \frac{f(\sigma_i)}{\left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]_i^t \cdot [E] \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]_i} \quad (3.11)$$

En considérant maintenant comme chargement les contraintes initiales  $[\Delta\sigma_i^{eq}]$ , les déplacements supplémentaires  $[\Delta q_i]$  et les contraintes supplémentaires  $[\Delta\sigma_i^c]$  qui en résultent peuvent être calculés. A la fin de la  $(i + 1)$  itération, on aura :

$$[q_{i+1}] = [q_i] + [\Delta q_i] \quad (3.12)$$

$$[\sigma_{i+1}] = [\sigma_i] + [\Delta\sigma_i^{eq}] + [\Delta\sigma_i^c] \quad (3.13)$$

Le processus itératif est terminé lorsque :

$$f[\sigma_{i+1}] < \epsilon \quad (3.14)$$

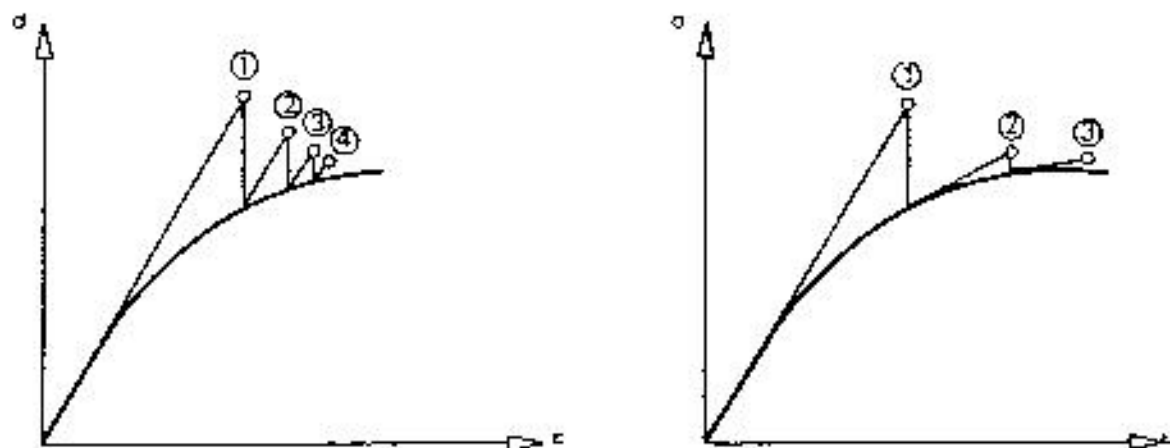
$\epsilon$  étant l'erreur admissible lors de la recherche de la valeur nulle du critère.

La convergence de la méthode des contraintes initiales est démontrée théoriquement lorsque l'écrouissage est positif, (14).

On voit tout de suite les avantages indéniables de la méthode des contraintes initiales. En effet :

- la matrice de rigidité est inversée seulement pendant la première itération ;
- la première itération fournit les résultats du calcul élastique ;
- une fois stockée en mémoire la matrice de rigidité, divers types de chargements peuvent être étudiés.

Cependant, toute médaille a son revers ! Il faut dire que le processus de convergence de la méthode des contraintes initiales est plus lent que celui de la méthode de rigidité variable (Fig. 3.3).



a. Méthode des contraintes initiales      b. Méthode de rigidité variable

Fig. 3.3 - La convergence des méthodes itératives en élasto-plasticité



Deux questions se posent :

- comment choisir la valeur de l'erreur admissible  $\epsilon$  ;
- comment choisir le nombre d'itérations  $N$  à effectuer.

La réponse à ces deux questions n'est pas immédiate, car elle dépend de la nature du problème. Les valeurs de  $\epsilon$  et  $N$  doivent être telles qu'on n'observerait plus de différences sensibles dans les valeurs des contraintes et des déformations pour le point le plus sollicité de la structure, si on avait choisi une valeur de  $\epsilon$  plus petite et une valeur de  $N$  plus grande (cf. tableau 3.1).

$\epsilon$	0.01	0.001
$N$	5	10
$\sigma$	10.82	10.73
$v$	3.46	3.51

$\epsilon$	0.01	0.001
$N$	5	10
$\sigma$	10.82	14.69
$v$	3.46	2.21

a. Bonne convergence  
pour  $\epsilon = 0.01$ ,  $N = 5$

b. Mauvaise convergence  
pour  $\epsilon = 0.01$ ,  $N = 5$

Tableau 3.1 - Exemple d'une bonne et d'une mauvaise convergence (valeurs numériques en S.I.)

Dans la présentation de la méthode des contraintes initiales dans le cas d'un modèle élasto-plastique, nous avons utilisé la loi de comportement plastique de Hencky ; ainsi, nous avons pu surmonter les difficultés d'intégration par rapport au temps que pose l'utilisation de la loi de Hill.

#### 3.2.4 - La méthode des déformations initiales

Son processus est identique à celui de la méthode des contraintes initiales. A chaque itération, des déformations initiales sont calculées afin de s'approcher de la loi de comportement élasto-plastique.

La convergence de la méthode des déformations initiales n'est pas démontrée théoriquement, (14).

### 3.2.5 - Conclusions sur les méthodes numériques en élasto-plasticité

On vient d'exposer les principes des méthodes numériques de résolution des problèmes en élasto-plasticité. La méthode des contraintes initiales est la seule, actuellement, pour laquelle la convergence est démontrée théoriquement (lorsque l'écroutissage est positif). De plus, cette méthode étant la plus facile à mettre en oeuvre et la moins onéreuse, elle devient la plus avantageuse dans les modèles par éléments finis.

Nous devons aussi souligner une autre question sur laquelle la plupart des recherches sont restées muettes jusqu'à maintenant. Il s'agit du choix optimal du pas  $\Delta t$  pour la réalisation numérique de la loi de Hill. Ce choix est encore effectué d'après des essais successifs et aucune détermination théorique ne peut être faite a priori. C'est la raison pour laquelle on a souvent recours aux relations de Hencky, pour lesquelles le paramètre "temps" n'intervient pas.

### 3.3 - Quelques remarques sur les lois associées et non associées en plasticité

L'utilisation pour les matériaux granulaires d'un critère type Mohr-Coulomb et de la loi de normalité donne une relative imprécision aux résultats des calculs, du fait notamment des problèmes de dilatance. Pour les graves surtout, à cause de la dilatance, il n'est pas incertain de sortir du domaine d'élasticité initial pour avoir des déformations irréversibles : celles-ci peuvent avoir lieu dès le début de la sollicitation tout en restant à l'intérieur du domaine d'élasticité initial. Pour pallier ces difficultés, certains auteurs (Davis (1969), Palmer (1968)) ont essayé d'utiliser une loi non associée.

Soit  $f$  la fonction de charge du matériau considéré et  $G$  le potentiel plastique ; une loi non associée est définie comme suit :

$$\frac{d\epsilon_{ij}^p}{dt} = \dot{\epsilon}_{ij}^p \cdot \langle \Psi(f) \rangle \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle \Psi(f) \rangle &= 0 & \text{si} & \quad f \leq 0 \\ \langle \Psi(f) \rangle &= \Psi(f) & \text{si} & \quad f > 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dans de nombreux problèmes pratiques, on écrit :

$$\Psi(f) = \gamma \frac{f}{f_0} \quad (3.17)$$

$f_0$  étant une valeur de référence.

Lorsqu'on utilise une loi associée en plasticité, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.18)$$

ou, à une constante près,

$$f = G \quad (3.19)$$

En tout état de cause, il faut souligner que dans de nombreux cas une loi non associée, tout en compliquant les calculs numériques, n'a apporté qu'une relative amélioration à la précision des calculs, (15). C'est la raison pour laquelle les lois associées sont utilisées couramment dans les modèles d'élasto-plasticité.

#### 4 - REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 - Argyris J., "Elasto-plastic matrix displacement analysis of three dimensional continua", J. Roy. Aero. Soc., Vol 32, 1965.
- 2 - Bul H., "Evolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec écrouissage plastique et comportement élasto-plastique d'un agrégat de cristaux cubiques", 1970.
- 3 - Drucker D., "Introduction to Mechanics of Deformable Solids" Mc. Graw-Hill, 1967.
- 4 - Drucker D., "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations", Proc. 1<sup>st</sup> U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1951.
- 5 - Drucker D., Prager W., "Soil Mechanics and plastic analysis of limit design", Quart. Appl. Math., vol 10, 1952.
- 6 - Flügge S. (Editeur), "Elastizität und Plastizität", Springer, 1958.
- 7 - Hill R., "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford Univ. Press, 1950.

- 8 - Huet C., "Comportements visco-élastiques", ENPC, PARIS, 1979.
- 9 - Mandel J., "Plasticité classique et viscoplasticité", Springer, 1971.
- 10 - Owen D., Hinton E., "Finite Elements in Plasticity", Pineridge Press, Swansea.
- 11 - Salençon J., Halphen B., "Elasto-plasticité", ENPC, 1980.
- 12 - Von Mises R., "Mechanik der plastischen Formänderung der Kristalle", Z. Angew. Math. Mech., Vol 8, 1928.
- 12a - Zienkiewicz O., Valliappan S., King I., "Elasto-plastic Solutions of Engineering Problems, Initial-stress, finite element approach", Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol 1, 1969.
- 13 - Zienkiewicz O., "The Finite Element Method in Engineering Science" Mc. Graw-Hill, 1971.
- 14 - Zarka J. et Nguyen D., "Plasticité et Visco-plasticité : Quelques méthodes de résolution numérique", Séminaire sur la Plasticité et Visco-plasticité, Ecole Polytechnique PARIS, 1972.
- 15 - Zienkiewicz O., Humpheson C., Lewis R., "Associated and non associated visco-plasticity and plasticity in Soil Mechanics", Géotechnique, Vol. 25, N° 4, 1975.