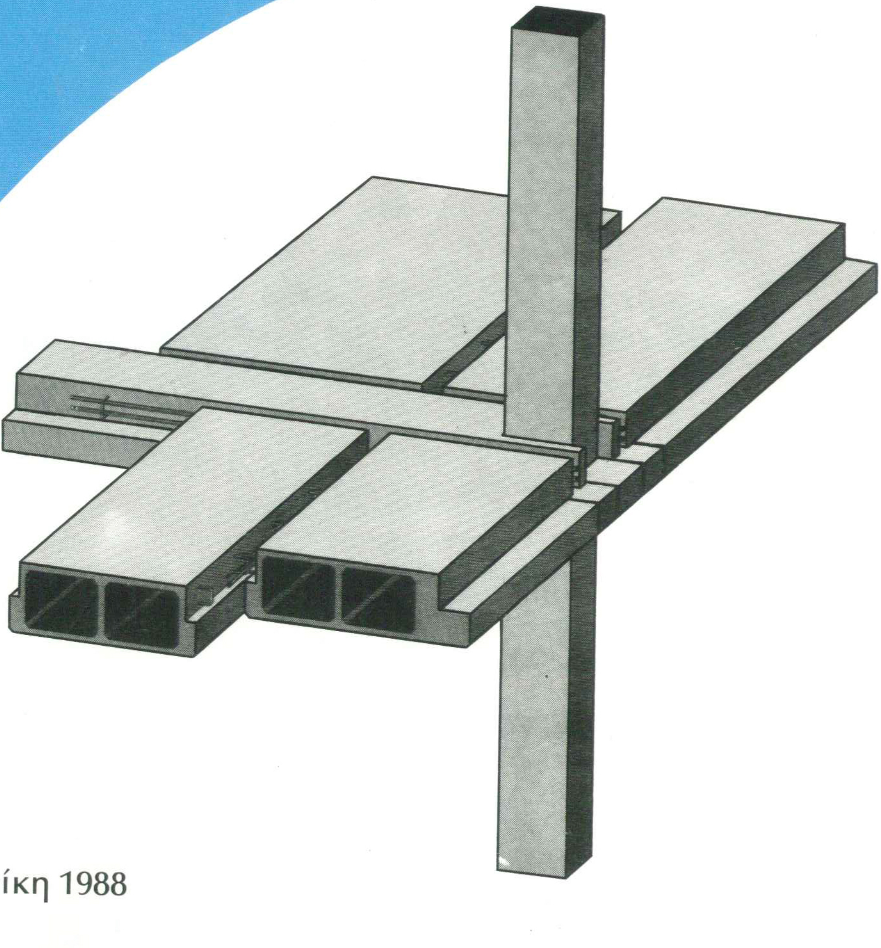
βασίλης α. προφυλλίδης

ασκήσεις αντοχής υλικών

μεθοδολογία και λυμένες ασκήσεις



χαρ τά γά νης
θεσσαλονίκη 1988

βασιλης α. προφυλλιδης

ασκησεις αντοχης υλικων

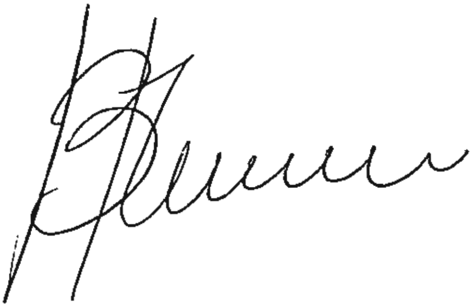
μεθοδολογια και λυμενες ασκησεις

τανυστες - παραμορφωσεις - τασεις - καταστατικες εξισωσεις - τασικη συναρτηση - κεντρο βαρους - ροπες αδρανειας - καμψη - ελαστικη γραμμη - διατμηση - εξισωση Clapeyron - στρεψη - ενεργειακες μεθοδοι - θεωρημα Castigliano - υπερστατικοι φορεις - γενικες ασκησεις

ενατη εκδοση
βελτιωμενη και επαυξημενη

θεσσαλονικη 1988

Τά γνήσια ἀντίτυπα ὑπογράφονται



ἀ φ ι έ ρ ω μ α
στούς γονεῖς μου

αντι για προλογο

Ἡ θεωρητική καί πειραματική ἔρευνα τῶν φυσικῶν φαινομένων διαχωρίζει τήν ἀπέραντη φυσική ἐπιστήμη σέ δύο κλάδους.

Ὁ πρῶτος ἐρευνᾶ τή μακροσκοπική καί συνεχή συμπεριφορά τῶν ὑλικῶν καί ἀποτελεῖ τή φ υ σ ι κ ή τ ῶ ν σ υ ν ε χ ῶ ν μ έ σ ω ν.

Ὁ δεύτερος ἀσχολεῖται μέ τή μικροσκοπική καί ἀσυνεχή συμπεριφορά τῶν ὑλικῶν καί ἀποτελεῖ τή φ υ σ ι κ ή τ ῶ ν ἀ σ υ ν ε χ ῶ ν μ έ σ ω ν.

Ἄν περιοριστοῦμε σέ καθαρά μηχανικά φαινόμενα, διακρίνουμε τή μ η χ α ν ι κ ή τ ῶ ν σ υ ν ε χ ῶ ν καί τή μ η χ α ν ι κ ή τ ῶ ν ἀ σ υ ν ε χ ῶ ν μ έ σ ω ν.

Τμῆμα τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν μέσων ἀποτελεῖ καί ἡ ἀ ν τ ο χ ή τ ῶ ν ὑ λ ι κ ῶ ν, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰδικά σέ σώματα, πού ὑπακούουν στό νόμο τῆς γραμμικῆς ἐλαστικότητας.

Στό βιβλίο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ πρακτικά προβλήματα ἀντοχῆς τῶν ὑλικῶν. Θεώρησα, ὡστόσο, σκόπιμο νά προτάξω στά ἀντίστοιχα κεφάλαια παρατηρήσεις καί ὑποδείξεις σέ ὁρισμένα σημεῖα τῆς θεωρίας γιά τήν πληρέστερη κατανόηση τῶν προβλημάτων.

Προσπάθησα νά περιλάβω σέ κάθε κεφάλαιο ἀσκήσεις ἀντιπροσωπευτικές · γι' αὐτό καί κάθε ἄσκηση ἔχει τήν ἰδιομορφία της. Ἐπειδή ὅμως ἡ φύση τοῦ μαθήματος εἶναι τέτοια, ὥστε πολλά στοιχεῖα πού ἔχουν ἀναφερθεῖ στά προηγούμενα κεφάλαια νά ἐπαναλαμβάνονται συνεχῶς, εἶναι εὐνόητο ὅτι τά στοιχεῖα αὐτά δέν μποροῦν νά γράφονται πολλές φορές μέ τόν ἴδιο ἀναλυτικό τρόπο, πού ἀναπτύχθηκαν τήν πρώτη φορά. Γι' αὐτό θά συνιστοῦσα κατά τή μελέτη τῶν διαφόρων κεφαλαίων καί ἀσκήσεων νά ἀκολουθηθεῖ ἡ σειρά τοῦ βιβλίου.

Θά συνιστοῦσα ἐπίσης στόν ἀναγνώστη νά προσπαθήσει ὁ ἴδιος νά λύσει τίς διάφορες ἀσκήσεις, πρίν μελετήσει τίς λύσεις τους ἀπό τό βιβλίο. Μ' αὐτόν τόν τρόπο θά ἔχει προβληματισθεῖ ἀρκετά, ὥστε νά κατανοήσει καί νά ἐμπεδώσει τίς ἀσκήσεις τῶν διαφόρων κεφαλαίων, ἀλλά καί νά αὐτενεργήσει, ὅταν τοῦ δοθεῖ μιά ἄγνωστη ἄσκηση.

Θεωρῶ ὑποχρέωσή μου νά εὐχαριστήσω ἀπό τή θέση αὐτή ὅλους ἐκείνους, πού μέ βοήθησαν κατά τίς διάφορες φάσεις τῆς συγγραφῆς αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

Β. Α. Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

ΤΑΝΥΣΤΕΣ

α. συμβολισμοι

Ἕνα μαθηματικό ἤ φυσικό μέγεθος μπορεῖ νά παρασταθεῖ ἀπό ἕνα σύμβολο, πού ἀκολουθεῖται ἀπό ὁρισμένους δεῖχτες, π.χ. b_{ijk} (1). Καθένας ἀπ' αὐτούς τούς δεῖχτες παίρνει τιμές ἀπό ἕνα σύνολο ἀριθμῶν. Ἀντικαθιστώντας μιά ὁποιαδήποτε διάταξη τιμῶν τῶν i, j, k στήν (1) παίρνουμε μιά ἀριθμητική τιμή τοῦ ὑπ' ὄψη μεγέθους.

Ἐπειδή στό βιβλίο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων, οἱ δεῖχτες στά διάφορα σύμβολα τῶν φυσικῶν μεγεθῶν θά παίρνουν τιμές ἀπό τό σύνολο $\Pi = \{1, 2, 3\}$.

Θά συμβολίζουμε μέ κεφαλαῖα γράμματα τούς ἄξονες τῶν συστημάτων συντεταγμένων καί μέ μικρά γράμματα τίς συντεταγμένες ἑνός σημείου. Τούς ἄξονες τῶν συστημάτων συντεταγμένων θά τούς συμβολίζουμε μέ X, Y, Z ἤ μέ X_1, X_2, X_3. Ἀντίστοιχα ἕνα σύστημα συντεταγμένων θά συμβολίζεται μέ XYZ ἤ μέ $X_1X_2X_3$. Στή δεύτερη αὐτή περίπτωση μποροῦμε ἰσοδύναμα νά γράφουμε σύστημα συντεταγμένων X_i, ὅπου τό i παίρνει τίς τιμές 1, 2, 3. Ἀντικαθιστώντας τό i μέ μιά ἀπ' αὐτές τίς τιμές παίρνουμε ἕναν ἀπό τούς ἄξονες τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Γιά $i=2$, π.χ., παίρνουμε τόν ἄξονα X_2.

Ἄν σ' ἕνα μονώνυμο ἤ σέ ὅρο πολυωνύμου ἕνας δείχτης ἐμφανισθεῖ δύο φορές, τότε αὐτό θά δηλώνει ἄθροιση ὅρων, πού ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές 1, 2 καί 3 τοῦ ἐπαναλαμβανόμενου δείχτη. Ἔτσι π.χ.

$$b_{1i}c_{i2} = \underbrace{b_{11}c_{12}}_{i=1} + \underbrace{b_{12}c_{22}}_{i=2} + \underbrace{b_{13}c_{32}}_{i=3}$$

Σ' ἕνα μονώνυμο ἤ σέ ὅρο πολυωνύμου ἕνας δείχτης μπορεῖ νά ἐμφανίζεται τό πολύ δύο φορές. Καμμιά ἔννοια δέν δίνεται σέ δείχτη, πού ἐμφανίζεται πάνω ἀπό δύο φορές.

Τό δέλτα τοῦ Kronecker δ_{ij} ἰσοῦται μέ 1 ἄν $i=j$, μέ 0 ἄν $i \neq j$. Πολλαπλασιασμός μέ δέλτα τοῦ Kronecker καί μέ ἐπαναλαμβανόμενο δείχτη ἰσοδυναμεῖ μέ πράξη ἀντικατάστασης μέ τόν ἐλεύθερο δείχτη τοῦ δέλτα, π.χ. $\delta_{ik}\alpha_{kj} = \alpha_{ij}$. Ἐξ ἄλλου $\delta_{ii} = 3$, γιατί τό i εἶναι ἐπαναλαμβανόμενος δείχτης καί ἑπομένως θά ἔχουμε ἄθροιση ὅρων, πού ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές τοῦ i 1, 2 καί 3 ($\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$)

B. ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Οἱ τανυστές εἶναι μεγέθη πού ἔχουν κάποια φυσική σημασία καί ἱκανοποιοῦν ὁρισμένο νόμο μετασχηματισμοῦ. Ἀπέκτησαν τή φήμη τους μετά τή χρησιμοποίησή τους ἀπό τόν Einstein στή γενική θεωρία τῆς σχετικότητας.

Δύο εἶναι τά βασικά στοιχεῖα ἑνός τανυστῆ. Πρῶτο ὅτι ὑπάρχει ἕνας ὁρισμένος νόμος μετασχηματισμοῦ ἀπό τό ἕνα σύστημα συντεταγμένων στό ἄλλο. Δηλαδή ἄν εἶναι γνωστή ἡ ἔκφραση τοῦ τανυστῆ σ᾽ ἕνα σύστημα συντεταγμένων, τότε ἡ ἔκφρασή του σ᾽ ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σύστημα συντεταγμένων (τοῦ ὁποίου ἡ θέση εἶναι γνωστή ὡς πρός τό πρῶτο) μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ βάση ὁρισμένες ἁπλές σχέσεις, τίς ὁποῖες ὀνομάζουμε σχέσεις μετασχηματισμοῦ. Γιά κάθε κατηγορία τανυστῶν ἰσχύει ὁ ἴδιος νόμος μετασχηματισμοῦ.

Δεύτερο ὅτι ὑπάρχουν ὁρισμένες ποσότητες τοῦ τανυστῆ πού παραμένουν ἀναλλοίωτες κατά τό μετασχηματισμό του ἀπό τό ἕνα σύστημα συντεταγμένων στό ἄλλο.

Θά ἀσχοληθοῦμε μέ τανυστές μηδενικῆς τάξης (βαθμωτά μεγέθη), πρώτης τάξης καί δεύτερης τάξης. Ἕνας τανυστής μηδενικῆς τάξης ἔχει τήν ἴδια ἔκφραση σέ κάθε σύστημα συντεταγμένων.

Οἱ τανυστές πρώτης τάξης εἶναι τά διανύσματα, γιά τά ὁποῖα ἡ ἀναλλοίωτη ποσότητα εἶναι τό μῆκος τοῦ διανύσματος. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἄν εἶναι x_1, x_2, x_3 οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος σ᾽ ἕνα ὁποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων, τότε ἡ ἔκφραση $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ θά ἔχει τήν ἴδια τιμή σέ κάθε σύστημα συντεταγμένων. Ὁ νόμος μετασχηματισμοῦ ἑνός διανύσματος $\underset{\sim}{u}$ ἀπό τό σύστημα συντεταγμένων X_i στό σύστημα συντεταγμένων X_i' εἶναι $\underset{\sim}{u}' = \underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{u}$, ὅπου $\underset{\sim}{R}$ εἶναι τό μητρῶο μετασχηματισμοῦ. Τό μητρῶο αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό τά συνημίτονα κατεύθυνσης, πού σχηματίζουν οἱ ἄξονες τοῦ νέου συστήματος συντεταγμένων μέ τούς ἄξονες τοῦ παλιοῦ (πρβλ. ἄσκηση 1).

Τά φυσικά μεγέθη πού θά χρησιμοποιήσουμε στην Ἀντοχή τῶν Ὑλικῶν παριστάνονται ἀπό τανυστές δεύτερης τάξης. Ἔτσι ἡ κατάσταση τῶν παραμορφώσεων πού ἐπικρατεῖ σ᾽ ἕνα σῶμα μπορεῖ νά παρασταθεῖ ἀπό τόν τανυστή παραμόρφωσης (κεφάλαιο 1). Ἐξάλλου ἡ περιγραφή τῆς κατανομῆς τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων μέσα σ' ἕνα σῶμα μπορεῖ νά γίνει μέ τόν τανυστή τάσης (κεφάλαιο 2).

Ἕνας τανυστής δεύτερης τάξης παριστάνεται ἀπό ἕνα μητρῶο διάστασης 3×3 . Θεωροῦμε τόν τανυστή δεύτερης τάξης $\underset{\sim}{\alpha}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἔκφραση στό σύστημα συντεταγμένων X_i εἶναι

$$\underset{\sim}{\alpha} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}$$

Ἡ ἔκφραση τοῦ $\underset{\sim}{\alpha}$ σ' ἕνα ἄλλο σύστημα συντεταγμένων X_i' θά εἶναι $\underset{\sim}{\alpha}' = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{\alpha} \cdot \underset{\sim}{R}^*$, ὅπου R εἶναι τό μητρῶο μετασχηματισμοῦ καί R^* τό ἀνάστροφο τοῦ R , δηλαδή τό μητρῶο πού προκύπτει ἄν στό R κάνουμε τίς γραμμές στῆλες καί τίς στῆλες γραμμές.

Ὁ τανυστής δεύτερης τάξης $\underset{\sim}{\alpha}$ ἔχει τίς ἑξῆς 3 ἀναλλοίωτες : $Tr\underset{\sim}{\alpha} = \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$ (τό ἴχνος τοῦ $\underset{\sim}{\alpha}$, δηλαδή τό ἄθροισμα τῶν διαγώνιων στοιχείων του) , $Tr\underset{\sim}{\alpha}^2$ (τό ἴχνος τοῦ $\underset{\sim}{\alpha}^2$) , $Tr\underset{\sim}{\alpha}^3$ (τό ἴχνος τοῦ $\underset{\sim}{\alpha}^3$). Μποροῦμε ἰσοδύναμα νά θεωρήσουμε ὡς 3 ἀναλλοίωτες ποσότητες τίς $Tr\underset{\sim}{\alpha}$, $\alpha_{11}\cdot\alpha_{22} + \alpha_{22}\cdot\alpha_{33} + \alpha_{33}\cdot\alpha_{11} - \alpha_{12}^2 - \alpha_{23}^2 - \alpha_{31}^2$, $\det\underset{\sim}{\alpha}$ (τήν ὁρίζουσα τοῦ $\underset{\sim}{\alpha}$).

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ τανυστής πρώτης τάξης ἔχει 3 συνιστῶσες , ἐνῶ ὁ τανυστής δεύτερης τάξης ἔχει 9 . Ἄν μάλιστα ὁ τανυστής δεύτερης τάξης εἶναι καί συμμετρικός , δηλαδή $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, τότε οἱ ἄγνωστες συνιστῶσες του γίνονται 6 .

Τό μητρῶο μετασχηματισμοῦ R εἶναι ὀρθομοναδιαῖο , δηλαδή ἱκανοποιεῖ τίς σχέσεις $\underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{R}^* = \underset{\sim}{I}$, $\underset{\sim}{R}^* \cdot \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{I}$, ὅπου $\underset{\sim}{I}$ εἶναι τό μοναδιαῖο μητρῶο.

άσκηση

Δίνεται τό διάνυσμα $\bar{u} = 32,00\,\bar{i}_1 - 15,27\,\bar{i}_2 - 41,42\,\bar{i}_3$ έκφρασμένο σέ σύστημα άξόνων (O, X_1, X_2, X_3). Νά βρεθεῖ ἡ ἔκφρασή του στό σύστημα (O, X_1', X_2', X_3'), ὅπου:

	X_1	X_2	X_3
X_1'	45°	60°	60°
X_2'	90°	?	?
X_3'	?	?	?

λύση

Τό διάνυσμα εἶναι τανυστής πρώτης τάξης, ἐπομένως ἡ ἔκφραση τοῦ $\bar{u}$ στό σύστημα (O, X_1', X_2', X_3') εἶναι $\bar{u}' = R\cdot\bar{u}$, ὅπου R τό μητρῶο μετασχηματισμοῦ καί

$$R = \begin{Vmatrix} \cos X_1'X_1 & \cos X_1'X_2 & \cos X_1'X_3 \\ \cos X_2'X_1 & \cos X_2'X_2 & \cos X_2'X_3 \\ \cos X_3'X_1 & \cos X_3'X_2 & \cos X_3'X_3 \end{Vmatrix}$$

Ἄγνωστα εἶναι τά $\cos X_2'X_2$, $\cos X_2'X_3$, $\cos X_3'X_1$, $\cos X_3'X_2$, $\cos X_3'X_3$, τά ὁποῖα θά ὑπολογίσουμε.

Ἀφοῦ τό R εἶναι μητρῶο ὀρθομοναδιαῖο, τό μέτρο μιᾶς γραμμῆς του θά ἰσοῦται μέ τή μονάδα, ἐνῶ τό ἐσωτερικό γινόμενο μιᾶς γραμμῆς ἐπί μιά ἄλλη θά εἶναι μηδέν. Ἀντίστοιχα ἰσχύουν καί γιά τίς στῆλες.

Ἔτσι λοιπόν θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 X_2'X_1 + \cos^2 X_2'X_2 + \cos^2 X_2'X_3 = 1 \\ \cos X_1'X_1 \cdot \cos X_2'X_1 + \cos X_1'X_2 \cdot \cos X_2'X_2 + \cos X_1'X_3 \cdot \cos X_2'X_3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 + \cos^2 X_2'X_2 + \cos^2 X_2'X_3 = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\cos X_2'X_2 + \frac{1}{2}\cdot\cos X_2'X_3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \cos X_2'X_2 = \pm 0,707 \\ \cos X_2'X_3 = \mp 0,707 \end{array}$$

Ὁ ἄξονας X_1' εἶναι πλήρως καθορισμένος. Ἐπίσης εἶναι καθορισμένη ἡ θέση τοῦ X_2' ὡς πρός τόν X_1. Ἀκόμη θά πρέπει τό σύστημα (O, X_1', X_2', X_3') νά εἶναι δεξιόστροφο. Τίς παραπάνω συνθῆκες ἱκανοποιεῖ μόνο ἡ τιμή $\cos X_2'X_2 = 0,707$, ὁπότε $\cos X_2'X_3 = -0,707$.

Ἀντίστοιχες σχέσεις ἔχουμε καί γιά τά ἄλλα τρία συνημίτονα κατεύθυνσης

$$\cos^2 X_3'X_1 + \cos^2 X_3'X_2 + \cos^2 X_3'X_3 = 1 \quad (1)$$

$$\cos X_3'X_1 \cdot \cos X_2'X_1 + \cos X_3'X_2 \cdot \cos X_2'X_2 + \cos X_3'X_3 \cdot \cos X_2'X_3 = 0 \quad (2)$$

$$\cos X_3'X_1 \cdot \cos X_1'X_1 + \cos X_3'X_2 \cdot \cos X_1'X_2 + \cos X_3'X_3 \cdot \cos X_1'X_3 = 0 \quad (3)$$

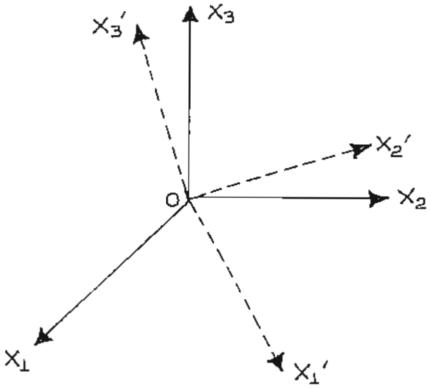
$$(2) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos X_3'X_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos X_3'X_3 = 0 \Rightarrow \cos X_3'X_2 = \cos X_3'X_3 \qquad (4)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos X_3'X_1 + \frac{1}{2}\cdot\cos X_3'X_2 + \frac{1}{2}\cdot\cos X_3'X_3 = 0 \qquad (5)$$

Οἱ (1), (4) καί (5) δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2 X_3'X_1 + 2\cdot\cos^2 X_3'X_2 = 1 \\ &\sqrt{2}\cdot\cos X_3'X_1 + 2\cdot\cos X_3'X_2 = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} &\cos X_3'X_2 = \pm\frac{1}{2} \\ &\cos X_3'X_1 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ἐπειδή ὁ X_3' πρέπει νά ἀποτελεῖ μέ τούς X_1', X_2', δεξιόστροφο σύστημα θά πρέπει $\cos X_3'X_2 = \frac{1}{2}$, ὁπότε: $\cos X_3'X_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ καί



$$R = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$$, ἑπομένως

$$\bar{u}' = R\cdot\bar{u} = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 32 \\ -15{,}27 \\ -41{,}42 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 32 + \frac{1}{2}\cdot(-15{,}27) + \frac{1}{2}\cdot(-41{,}42)\right] \\ \left[0\cdot 32 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-15{,}27) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-41{,}42)\right] \\ \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 32 + \frac{1}{2}\cdot(-15{,}27) + \frac{1}{2}\cdot(-41{,}42)\right] \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5{,}718 \\ 18{,}491 \\ -50{,}972 \end{Vmatrix}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Ὁ τανυστὴς παραμόρφωσης εἶναι : $\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix}$

Ὁ $\underset{\sim}{\varepsilon}$ εἶναι συμμετρικὸς τανυστὴς καὶ ἑπομένως $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$. Θὰ ἀσχοληθοῦμε μόνο μὲ ἀπειροστὲς παραμορφώσεις. Ἔτσι τὸ στοιχεῖο ε_{ij} τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, ὅπου u_i εἶναι οἱ συνιστῶσες τοῦ διανύσματος μετατόπισης $\bar{u}$ ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου τοῦ σώματος ἀπὸ τὴν ἀπαραμόρφωτη θέση A_0 στὴν παραμορφωμένη A .

Οἱ συνιστῶσες ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} καλοῦνται ὀρθὲς συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης, ἐνῶ οἱ συνιστῶσες ε_{ij} $(i \neq j)$ λέγονται διατμητικές. Ἡ συνιστῶσα ε_{11} παριστάνει τὴν ἀνηγμένη παραμόρφωση (ἀνὰ μονάδα ἀρχικοῦ μήκους) μιᾶς ὑλικῆς ἴνας, ποὺ ἦταν παράλληλη πρὶν τὴν παραμόρφωση πρὸς τὸν ἄξονα X_1. Ἀντίστοιχα οἱ ε_{22} , ε_{33}. Ἡ συνιστῶσα ε_{12} ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τῆς παραμόρφωσης μιᾶς ἀρχικὰ ὀρθῆς γωνίας, ποὺ σχηματιζόταν ἀπὸ δύο ἀπειροστὲς ὑλικὲς ἴνες, ἀρχικὰ παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες X_1 καὶ X_2. Ἀντίστοιχα οἱ ε_{13} , ε_{23} .

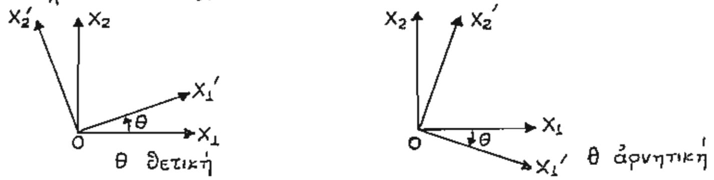
Ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποία στρεβλώνεται μιὰ γωνία, ποὺ πρὶν τὴν παραμόρφωση ἦταν ὀρθὴ καὶ οἱ πλευρὲς της παράλληλες πρὸς τοὺς ἄξονες X_1 , X_2 , λέγεται γωνία διάτμησης γ_{12} καὶ ἰσοῦται μὲ $2\cdot\varepsilon_{12}$, $\gamma_{12} = 2\cdot\varepsilon_{12}$. Γενικὰ $\gamma_{ij} = 2\cdot\varepsilon_{ij}$.

Ἐπίπεδη παραμόρφωση στὸ ἐπίπεδο (X_1, X_2) λέγεται ἐκείνη στὴν ὁποία $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$, ὁπότε ὁ τανυστὴς παραμόρφωσης γίνεται:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Ἀναζητοῦμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων, στό ὁποῖο νά μή ὑπάρχουν διατμητικές παραμορφώσεις, ἀλλά μόνο ὀρθές. Τό σύστημα αὐτό λέγεται κύριο σύστημα τῆς παραμόρφωσης καί ἀντιστοιχεῖ σέ γωνία στροφῆς θ, πού δίνεται ἀπό τή σχέση $\tan 2\theta = \dfrac{2\cdot\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}$.

Ἄν ἡ γωνία θ προκύψει θετική, τότε γιά νά πάρουμε τό κύριο σύστημα τῆς παραμόρφωσης (X_1', X_2') στρέφουμε τό σύστημα συντεταγμένων (X_1, X_2) ἀριστερόστροφα κατά γωνία θ, ἐνῶ ἄν ἡ θ προκύψει ἀρνητική στρέφουμε τό σύστημα συντεταγμένων (X_1, X_2) δεξιόστροφα κατά γωνία θ.*



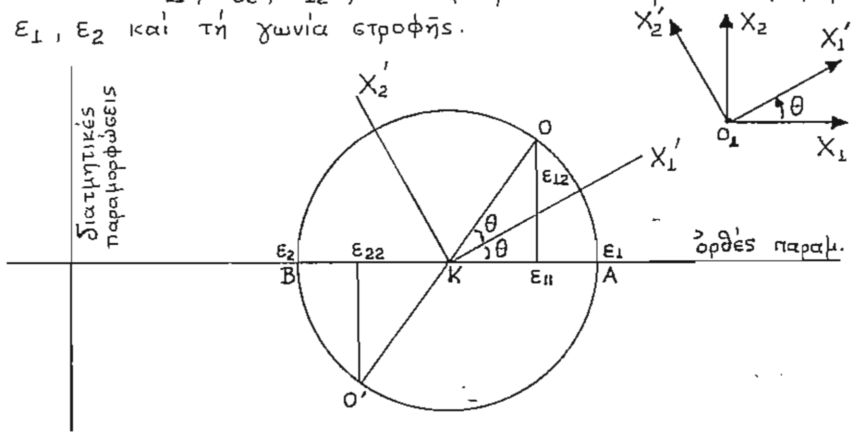
Οἱ κύριες παραμορφώσεις εἶναι :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2}$$

Οι κυκλοι του Mohr εἶναι γραφικές κατασκευές, μέ τίς ὁποῖες πετυχαίνουμε λύση στά ἑξῆς προβλήματα :

1) ἀπό τίς ε_{11}, ε_{22}, ε_{12}, νά βροῦμε τίς κύριες παραμορφώσεις ε_1, ε_2 καί τή γωνία στροφῆς.



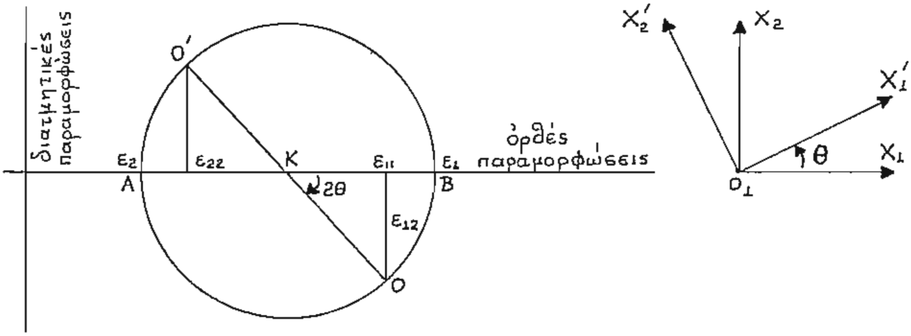
Στόν ἄξονα τῶν ὀρθῶν παραμορφώσεων παίρνουμε τίς ε_{11}, ε_{22}. Στήν τετμημένη τῆς ε_{11} (καί στόν ἄξονα τῶν διατμητικῶν παραμορφώσεων) παίρνουμε τήν ε_{12}. Κατά σύμβαση στήν τετμημένη τῆς ε_{22} (καί στόν ἄξονα τῶν διατμητικῶν παραμορφώσεων) παίρνουμε τμῆμα ἴσο μέ τήν ε_{12}, ἀλλά μέ ἀντίθετο πρόσημο ἀπό πρίν.

* Γενικά μιά γωνία στροφῆς θεωρεῖται θετική, ὅταν ἡ στροφή τοῦ ἄξονα X_1 γίνεται πρός τήν κατεύθυνση τῶν θετικῶν τεταγμένων τοῦ ἄξο-

Ὁρίζονται ἔτσι τά σημεῖα O, O' καί ἡ OO' (διάμετρος τοῦ κύκλου Mohr), τό σημεῖο τομῆς τῆς OO' καί τοῦ ἄξονα τῶν ὀρθῶν παραμορφώσεων (κέντρο τοῦ κύκλου Mohr) καί συνεπῶς καί οἱ ε_1, ε_2.

Σχετικά μέ τή γωνία στροφῆς παρατηροῦμε τά ἑξῆς. Στήν περίπτωση αὐτή εἶναι γνωστό τό σύστημα (X_1, X_2), ὅπου ἐπικρατοῦν οἱ παραμορφώσεις ε_{11}, ε_{22}, ε_{12}. Αὐτές ἀντιστοιχοῦνται στόν κύκλο Mohr ἀπό τή διάμετρο OO'. Οἱ κύριες παραμορφώσεις ἀντιστοιχοῦνται ἀπό τή διάμετρο BKA. Παρατηροῦμε ὅτι γιά νά πάρουμε τό φορέα πού ἀντιστοιχεῖ στίς κύριες παραμορφώσεις, πρέπει ἀπό τό φορέα τῶν παραμορφώσεων τοῦ συστήματος (X_1, X_2) νά στραφοῦμε δεξιόστροφα κατά γωνία $O\hat{K}A = 2\theta$. Τότε γιά νά πάρουμε τό κύριο σύστημα (X_1', X_2'), θά στρέψουμε τό σύστημα (X_1, X_2) ἀριστερόστροφα κατά γωνία $\frac{O\hat{K}A}{2} = \theta$. Δηλαδή ἀρκεῖ νά φέρουμε τή διχοτόμο τῆς $O\hat{K}A$, ὁπότε παίρνουμε τό φορέα τῆς X_1'.

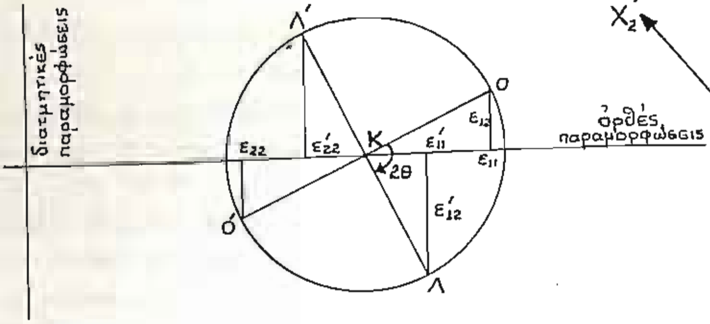
2) ἀπό τίς κύριες παραμορφώσεις καί τή γωνία στροφῆς τῶν 2 συστημάτων νά βροῦμε τίς ε_{11}, ε_{22}, ε_{12}.

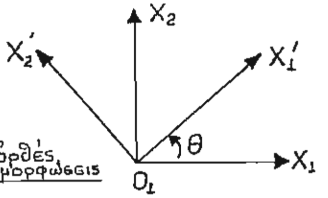


Τό (X_1, X_2) εἶναι τό κύριο σύστημα καί τό (X_1', X_2') τό τυχόν σύστημα, στό ὁποῖο καταλήγουμε, ἄν στραφοῦμε ἀριστερόστροφα κατά γωνία θ. Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου Mohr εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB. Στρεφόμαστε τότε δεξιόστροφα κατά γωνία 2θ καί παίρνουμε τίς παραμορφώσεις ε_{11}, ε_{22}, ε_{12}, πού ἀντιστοιχοῦν στό σύστημα (X_1', X_2').

3) ἀπό τίς ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} καί τή γωνία στροφῆς νά βροῦμε τίς ε_{11}', ε_{22}', ε_{12}', δηλαδή τήν ἔκφραση τοῦ τανυστῆ ἐπίπεδης παραμόρφωσης σ' ἕνα ἄλλο σύστημα συντεταγμένων.

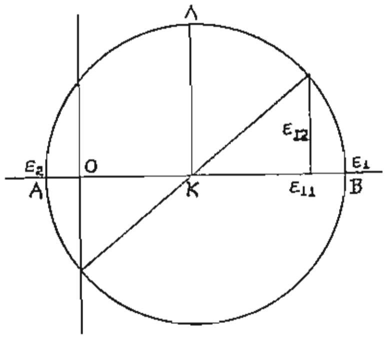
να X_2. Θεωρεῖται ἀρνητική, ὅταν γίνεται πρός τήν κατεύθυνση τῶν ἀρνητικῶν τεταγμένων τοῦ ἄξονα X_2.





Μέ βάση τά προηγούμενα βρίσκουμε τήν ΟΟ', φορέα πού ἀντιστοιχεῖ στίς παραμορφώσεις τοῦ συστήματος (X_1, X_2). Ἔπειτα στρέφουμε τήν ΟΟ' κατά γωνία 2θ καί ἔτσι βρίσκουμε τήν ΛΛ', φορέα πού ἀντιστοιχεῖ στίς παραμορφώσεις τοῦ συστήματος (X_1', X_2'). Ἀπό τήν ΛΛ' βρίσκουμε εὔκολα τίς ε_{11}', ε_{22}', ε_{12}'.

Παρατηρηση: Πολλές φορές ἡ $\varepsilon_{22}=0$ καί ζητεῖται ἡ μέγιστη διατμητική παραμόρφωση. Κατασκευάζουμε τόν κύκλο τοῦ Mohr



μέ ε_{11}, $\varepsilon_{22}=0$, ε_{12} καί βρίσκουμε ὅτι ἡ μέγιστη διατμητική παραμόρφωση εἶναι $K\Lambda = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ καί ὄχι ἡ ε_{12}.

ασκηση 1

Ἄν $\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ ὁ ἀποκλίνων τανυστής παραμόρφωσης, πού ἀντιστοιχεῖ στόν τανυστή παραμόρφωσης $\underset{\sim}{\varepsilon}$, νά ἀποδειχτοῦν οἱ σχέσεις* :

$$Tr\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}^2 = Tr\underset{\sim}{\varepsilon}^2 - \frac{1}{3}\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\right)^2 \qquad \text{καί}$$

$$Tr\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}^3 = Tr\underset{\sim}{\varepsilon}^3 - Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot Tr\underset{\sim}{\varepsilon}^2 + \frac{2}{9}\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\right)^3 .$$

λυση:

$\hat{\varepsilon}_{ij}^2 = \hat{\varepsilon}_{im}\cdot\hat{\varepsilon}_{mj}$, ὁπότε

---

* Ὁ ἀποκλίνων τανυστής παραμόρφωσης $\hat{\varepsilon}_{ij}$, πού ἀντιστοιχεῖ στόν τανυστή παραμόρφωσης ε_{ij}, ὁρίζεται ὡς : $\hat{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\Theta}{3}\cdot\delta_{ij}$, ὅπου Θ ἡ ἀνηγμένη διόγκωση, $\Theta = \frac{\delta V}{V}$. Ἰσχύει $\Theta = Tr\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{ii}$.

$$Tr\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}^2 = \hat{\varepsilon}_{im}\cdot\hat{\varepsilon}_{mi} = \left(\varepsilon_{im} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{im}\right)\cdot\left(\varepsilon_{mi} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{mi}\right) =$$

$$= \varepsilon_{im}\cdot\varepsilon_{mi} - \varepsilon_{im}\cdot\frac{\theta}{3}\cdot\delta_{mi} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{im}\cdot\varepsilon_{mi} + \frac{\theta^2}{9}\cdot\delta_{im}\cdot\delta_{mi} =$$

$$= \varepsilon^2_{ii} - \frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon_{ii} - \frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon_{ii} + \frac{\theta^2}{9}\cdot\delta_{ii} =$$

$$= \varepsilon^2_{ii} - \frac{\theta}{3}\cdot\theta^{*} - \frac{\theta}{3}\cdot\theta + \frac{\theta^2}{9}\cdot 3 = \varepsilon^2_{ii} - \frac{\theta^2}{3} = Tr\underset{\sim}{\varepsilon}^2 - \frac{1}{3}\cdot(Tr\varepsilon)^2.$$

$$\hat{\varepsilon}^3_{ik} = \hat{\varepsilon}_{im}\cdot\hat{\varepsilon}_{mj}\cdot\hat{\varepsilon}_{jk} \quad , \text{ ὁπότε}$$

$$Tr\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}^3 = \hat{\varepsilon}_{im}\cdot\hat{\varepsilon}_{mj}\cdot\hat{\varepsilon}_{ji} = \left(\varepsilon_{im} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{im}\right)\left(\varepsilon_{mj} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{mj}\right)\left(\varepsilon_{ji} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{ji}\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_{im}\cdot\varepsilon_{mj} - \frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon_{im}\cdot\delta_{mj} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{im}\cdot\varepsilon_{mj} + \frac{\theta^2}{9}\cdot\delta_{im}\cdot\delta_{mj}\right)\left(\varepsilon_{ji} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{ji}\right) =$$

$$= \left(\varepsilon^2_{ij} - \frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon_{ij} + \frac{\theta^2}{9}\cdot\delta_{ij}\right)\left(\varepsilon_{ji} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{ji}\right) =$$

$$= \left(\varepsilon^2_{ij} - 2\cdot\frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon_{ij} + \frac{\theta^2}{9}\cdot\delta_{ij}\right)\cdot\left(\varepsilon_{ji} - \frac{\theta}{3}\cdot\delta_{ji}\right) =$$

$$= \varepsilon^2_{ij}\cdot\varepsilon_{ji} - \frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon^2_{ij}\cdot\delta_{ij} - 2\cdot\frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon_{ji} + 2\cdot\frac{\theta}{3}\cdot\frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon_{ij}\cdot\delta_{ji} + \frac{\theta^2}{9}\cdot\delta_{ij}\cdot\varepsilon_{ji} -$$

$$- \frac{\theta^3}{27}\cdot\delta_{ij}\cdot\delta_{ji} = \varepsilon^3_{ii} - \frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon^2_{ii} - 2\cdot\frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon^2_{ii} + 2\cdot\frac{\theta^2}{9}\cdot\varepsilon_{ii} + \frac{\theta^2}{9}\cdot\varepsilon_{ii} - \frac{\theta^3}{27}\cdot\delta_{ii} =$$

$$= \varepsilon^3_{ii} - 3\cdot\frac{\theta}{3}\cdot\varepsilon^2_{ii} + 2\cdot\frac{\theta^2}{9}\cdot\theta + \frac{\theta^2}{9}\cdot\theta - \frac{\theta^3}{27}\cdot 3 = \varepsilon^3_{ii} - \theta\cdot\varepsilon^2_{ii} + 2\cdot\frac{\theta^3}{9} =$$

$$= Tr\underset{\sim}{\varepsilon}^3 - Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot Tr\underset{\sim}{\varepsilon}^2 + \frac{2}{9}(Tr\underset{\sim}{\varepsilon})^3.$$

ασκηση 2

᾿Επίπεδο στοιχεῖο σώματος ὑποβάλλεται σέ καθαρή διατμητική παραμόρφωση ε_{xy} στό σύστημα OXY. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ ὀρθές συνιστῶσες τῶν παραμορφώσεων σέ ὁποιοδήποτε ἄλλο σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ΟΞΗ εἶναι ἴσες καί ἀντίθετες. Νά βρεθοῦν ἐκφράσεις γιά τίς παραμορφώσεις $\varepsilon_{\xi\xi}$, $\varepsilon_{\eta\eta}$, $\varepsilon_{\xi\eta}$.

λυση

᾿Επειδή ἔχουμε καθαρή διατμητική παραμόρφωση, οἱ ὀρθές συνι-

$*$ $\varepsilon_{ii} = Tr\underset{\sim}{\varepsilon} = \theta$

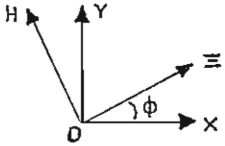
στώσεις τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης θά εἶναι μηδενικές. Ἐπειδή ἐξ ἄλλου ἡ παραμόρφωση συμβαίνει στό σύστημα OXY, μηδενικά θά εἶναι καί τά στοιχεῖα ε_{xz}, ε_{yz}. Μποροῦμε, λοιπόν, νά θεωρήσουμε τόν τανυστή παραμόρφωσης σάν ἕνα μητρῶο 2×2, ὁπότε

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & 0 \end{Vmatrix}$$

Στό σύστημα ΟΞΗ ὁ τανυστής παραμόρφωσης θά εἶναι

$$\underset{\sim}{\varepsilon}' = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & \varepsilon_{\xi\eta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\eta\eta} \end{Vmatrix}.$$

Ἡ πρώτη ἀναλλοίωτη ὅμως τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης ($Tr\underset{\sim}{\varepsilon}$) ἔχει τήν ἴδια τιμή ἀνεξάρτητα ἀπ' τό σύστημα συντεταγμένων. Στό OXY εἶναι $Tr\underset{\sim}{\varepsilon} = 0$, ἄρα καί $Tr\underset{\sim}{\varepsilon}' = 0 \Rightarrow \varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varepsilon_{\xi\xi} = -\varepsilon_{\eta\eta}$.



Τό μητρῶο μετασχηματισμοῦ θά εἶναι

$$\underset{\sim}{R} = \begin{Vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{Vmatrix} \quad \text{καί} \quad \underset{\sim}{\varepsilon}' = \underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\underset{\sim}{R}^{*}.$$

Οἱ πράξεις διευκολύνονται πολύ, ἄν τίς διατάξουμε σύμφωνα μέ τό διπλανό πίνακα, ὅπου πρῶτα γίνεται ὁ πολλαπλασιασμός $(R\cdot\varepsilon)$ καί ἔπειτα ἐπί τόν R^*, $(R\cdot\varepsilon)\cdot R^*$. Ἡ διάταξη αὐτή τῶν πράξεων * ἀποτελεῖ τό σχῆμα Falk. Σύμφωνα μέ τό σχῆμα αὐτό κάθε στοιχεῖο τοῦ γινομένου δύο μητρώων θά βρίσκεται στή συμβολή δύο εὐθειῶν, μιᾶς ὁριζόντιας (γραμμή τοῦ πρώτου μητρώου) καί μιᾶς κατακόρυφης (στήλη τοῦ δεύτερου). Ἔχουμε λοιπόν:

	ε	R^*
R	$R\cdot\varepsilon$	$R\cdot\varepsilon\cdot R^*$

		0	ε_{xy}	$\cos\phi$	$-\sin\phi$
		ε_{xy}	0	$\sin\phi$	$\cos\phi$
$\cos\phi$	$\sin\phi$	$\cos\phi\cdot 0+\sin\phi\cdot\varepsilon_{xy}$	$\cos\phi\cdot\varepsilon_{xy}+\sin\phi\cdot 0$	$\sin\phi\cdot\varepsilon_{xy}\cdot\cos\phi+$ $+\cos\phi\cdot\varepsilon_{xy}\cdot\sin\phi$	$\sin\phi\cdot\varepsilon_{xy}\cdot(-\sin\phi)+$ $+\cos\phi\cdot\varepsilon_{xy}\cdot\cos\phi$
$-\sin\phi$	$\cos\phi$	$-\sin\phi\cdot 0+\cos\phi\cdot\varepsilon_{xy}$	$-\sin\phi\cdot\varepsilon_{xy}+\cos\phi\cdot 0$	$\cos\phi\cdot\varepsilon_{xy}\cdot\cos\phi+$ $+(-\sin\phi\cdot\varepsilon_{xy})\cdot\sin\phi$	$\cos\phi\cdot\varepsilon_{xy}\cdot(-\sin\phi)+$ $+(-\sin\phi\cdot\varepsilon_{xy})\cdot\cos\phi$

* Στά μητρῶα τῆς ἄσκησης αὐτῆς τό πλῆθος τῶν γραμμῶν ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν στηλῶν. Τέτοια μητρῶα λέγονται τετραγωνικά. Τό γινόμενο δύο τετραγωνικῶν μητρώων $\underset{\sim}{\alpha}$ καί $\underset{\sim}{\beta}$, τάξης μ, εἶναι ἕνα τετραγωνικό μητρῶο $\underset{\sim}{\gamma}$, ἐπίσης τάξης $\underset{\sim}{\mu}$. Τό

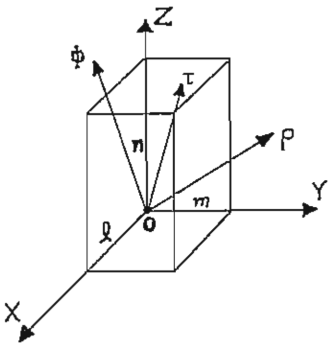
Εἶναι λοιπόν $\underset{\sim}{\varepsilon}' = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xy}\cdot \sin 2\phi & \varepsilon_{xy}\cdot \cos 2\phi \\ \varepsilon_{xy}\cdot \cos 2\phi & -\varepsilon_{xy}\cdot \sin 2\phi \end{Vmatrix}$ καί ἑπομένως

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xy}\cdot \sin 2\phi \;,\quad \varepsilon_{\eta\eta} = -\varepsilon_{xy}\cdot \sin 2\phi \;,\quad \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{xy}\cdot \cos 2\phi \,.$$

ασκηση 3

Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μέ σχέση μηκῶν πλευρῶν $\ell : m : n = 1 : 1 : 2$ παραμορφώνεται κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τά παράπλευρα ἐπίπεδα νά παραμένουν μεταξύ τους κάθετα, ἐνῶ οἱ πλευρές ℓ, m, n ἐπιμηκύνονται μέ τιμές ὀρθῶν ἐπιμηκύνσεων $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{100}$ ἀντίστοιχα. Πόση εἶναι ἡ ἐπιμήκυνση κατά τήν κατεύθυνση τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλεπιπέδου;

λυση



Στό σύστημα OXYZ ἡ ἔκφραση τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης εἶναι :

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{50} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{80} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{100} \end{Vmatrix}$$

Ζητοῦμε τήν ὀρθή συνιστῶσα κατά τήν κατεύθυνση τ στό ὀρθογώνιο σύστημα (τ, ρ, ϕ). Γιά νά βροῦμε τήν $\varepsilon_{\tau\tau}$ χρειαζόμαστε μόνο τήν πρώτη γραμμή τοῦ μητρώου μετασχηματισμοῦ. Εἶναι :

$$\cos(\tau, X) = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}} = \frac{\ell/\ell}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}/\ell} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\cos(\tau, Y) = \frac{m}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}} = \frac{m/m}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}/m} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\cos(\tau, Z) = \frac{n}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}} = \frac{n/\ell}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}/\ell} = \frac{2}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

τυπικό στοιχεῖο γ_{ik} τοῦ μητρώου $\underset{\sim}{\gamma}$, δηλαδή τό στοιχεῖο πού βρίσκεται στήν i γραμμή καί στήν k στήλη, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν στοιχείων τῆς γραμμῆς α_i τοῦ μητρώου $\underset{\sim}{\alpha}$ ἐπί τά ὁμοτάξια στοιχεῖα τῆς στήλης β_k τοῦ μητρώου $\underset{\sim}{\beta}$

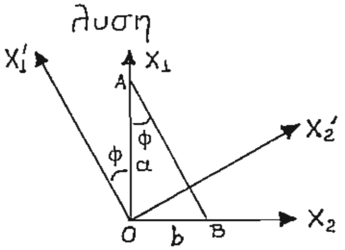
			$\frac{1}{50}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
			0	$\frac{1}{80}$	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
			0	0	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$
$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{50\sqrt{6}}$	$\frac{1}{80\sqrt{6}}$	$\frac{2}{100\sqrt{6}}$	$\frac{1}{50\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{80\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{100\sqrt{6}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}$ ← $\varepsilon_{\tau\tau}$

Ἑπομένως κατά τήν κατεύθυνση τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλεπιπέδου ἡ ἐπιμήκυνση εἶναι $\varepsilon_{\tau\tau} = 0{,}012$.

ασκηση 4

Οἱ κάθετες πλευρές ἀπειροστοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ἔχουν μήκη α, b. Ἄν οἱ ἀνηγμένες ὀρθές ἐπιμηκύνσεις κατά μῆκος τῶν ἰνῶν τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ε_α, ε_b καί κατά μῆκος τῆς ὑποτείνουσας ε_c, νά βρεθεῖ ἡ γωνία διάτμησης τῶν 2 καθέτων πλευρῶν.

λυση



Θεωροῦμε σύστημα ἀξόνων (X_1, X_2), ὅπως στό σχῆμα. Τότε $\varepsilon_{11} = \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_b$ καί ἡ $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{ac}$ ἄγνωστη. Γνωστή εἶναι ἐπίσης καί ἡ ε_c. Ἄν στρέψουμε τό σύστημα (X_1, X_2) κατά γωνία $O\hat{A}B = \phi$, παίρνουμε τό σύστημα (X_1', X_2'), τοῦ ὁποίου ὁ ἄξονας X_1' εἶναι παράλληλος πρός τήν ὑποτείνουσα AB. Ἡ ε_{11} στό σύστημα (X_1', X_2') θά δίνεται ἀπό τή σχέση :

$$\varepsilon_{11}' = \varepsilon_{11}\cdot\cos^2(-\phi) + \varepsilon_{22}\cdot\sin^2(-\phi) + \varepsilon_{12}\cdot\sin 2\phi \quad (1)$$

ὅπου ἡ γωνία ϕ παίρνεται ἀρνητική, διότι γιά νά πάρουμε τόν ἄξονα X_1' στρέφουμε τόν X_1 πρός τήν κατεύθυνση τοῦ ἀρνητικοῦ X_2.

Ἡ ε_{11}' ὅμως εἶναι γνωστή, διότι ἰσοῦται μέ τήν ἐπιμήκυνση κατά μῆκος τῆς ὑποτείνουσας, $\varepsilon_{11}' = \varepsilon_c$, $\tan\phi = \frac{b}{\alpha}$,

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \sin\phi = \frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

καί ἐπομένως ἡ (1) γίνεται :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2+b^2} + \varepsilon_b \cdot \frac{b^2}{\alpha^2+b^2} + \varepsilon_{\alpha c} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} \left(-\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right) =$$

$$= \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2+b^2} + \varepsilon_b \cdot \frac{b^2}{\alpha^2+b^2} - \varepsilon_{\alpha c} \cdot \frac{2\alpha b}{\alpha^2+b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\alpha c} \cdot \frac{2\alpha b}{\alpha^2+b^2} = \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2+b^2} + \varepsilon_b \cdot \frac{b^2}{\alpha^2+b^2} - \varepsilon_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\alpha c} = \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\alpha}{2b} + \varepsilon_b \cdot \frac{b}{2\alpha} - \varepsilon_c \frac{\alpha^2+b^2}{2\alpha b} .$$

Η γωνία διάτμησης τών 2 καθέτων πλευρών είναι:

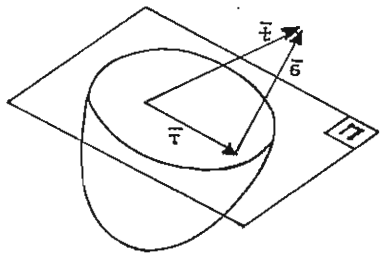
$$\gamma_{\alpha c} = 2\,\varepsilon_{\alpha c} = \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\alpha}{b} + \varepsilon_b \cdot \frac{\alpha}{b} - \varepsilon_c \cdot \frac{\alpha^2+b^2}{\alpha b} .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΑΣΕΙΣ

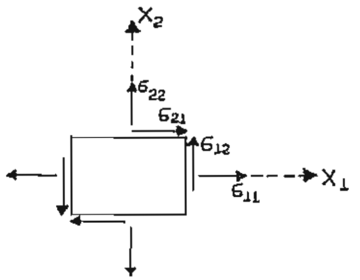
Τάση εἶναι ἡ ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας δύναμη σ' ἕνα σημεῖο σώματος καί κατά κάποιο ὁρισμένο προσανατολισμό. Ἄν στό ἴδιο σημεῖο ἑνός σώματος κάνουμε διαφορετικές τομές, θά ἔχουμε καί διαφορετικά διανύσματα τάσης.

Στό συμβολισμό σ_{ij} τῆς τάσης ὁ δείχτης i δηλώνει τό συντεταγμένο ἐπίπεδο (κάθετο στόν ἀντίστοιχο ἄξονα), στό ὁποῖο δρᾶ τό διάνυσμα τῆς τάσης, ἐνῶ ὁ δείχτης j δηλώνει τόν ἄξονα πρός τόν ὁποῖο εἶναι παράλληλο τό διάνυσμα τῆς τάσης. Ἔτσι ἡ σ_{12} δηλώνει τάση, πού δρᾶ στό συντεταγμένο ἐπίπεδο X_1 (κάθετο στόν ἄξονα X_1) καί εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα X_2.



Γιά μιά δοσμένη τομή ἑνός σώματος τό διάνυσμα τῆς τάσης $\bar{t}$ μπορεῖ ν' ἀναλυθεῖ σέ δυό συνιστῶσες, μιά κάθετη πρός τό ἐπίπεδο Π τῆς τομῆς (ὀρθή τάση) καί μιά πού νά κεῖται πάνω στήν τομή (διατμητική τάση). Οἱ ὀρθές τάσεις συμβολίζονται μέ τό γράμμα σ καί οἱ διατμητικές μέ τό γράμμα τ.

Οἱ ὀρθές τάσεις θεωροῦνται θετικές, ὅταν εἶναι ἐφελκυστικές.



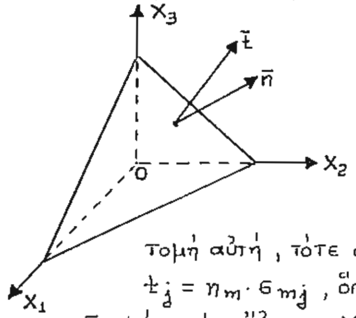
Οἱ διατμητικές τάσεις θεωροῦνται θετικές, ὅταν περιγράφουν τό στοιχεῖο κατά τήν ἀντιωρολογιακή φορά.

Ὁ τανυστής τάσης εἶναι: $\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Vmatrix}$

Ὁ $\underset{\sim}{\sigma}$ εἶναι συμμετρικός τανυστής, δηλαδή $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$.

Ἄν $\underset{\sim}{\sigma}$ εἶναι ἡ ἔκφραση τοῦ τανυστῆ τάσης στό σύστημα συντεταγμένων X_i, τότε ἡ ἔκφρασή του σ' ἕνα ἄλλο σύστημα συντεταγμένων X_i' εἶναι $\underset{\sim}{\sigma}' = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{R}^*$, ὅπου R εἶναι τό μητρῶο μετασχηματισμοῦ.

Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Ο ἑνός σώματος καί ὅτι γιά τό σημεῖο αὐτό ὁ τανυστής τῆς τάσης εἶναι $\underset{\sim}{\sigma}$. Θεωροῦμε ἐπίσης ὅτι στή γειτονιά τοῦ σημείου Ο καί σέ ἀπειροστή ἀπόσταση ἀπ' αὐτό (ὥστε νά μή ἔχουμε μεταβολή τοῦ τανυστῆ τάσης) κάνουμε μιά τομή τοῦ σώματος, τῆς ὁποίας τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα εἶναι $\bar{n}$. Ἄν $\bar{t}$ εἶναι τό διάνυσμα τῆς τάσης στήν τομή αὐτή, τότε οἱ τρεῖς συνιστῶσες τοῦ $\bar{t}$ δίνονται ἀπό τή σχέση: $t_j = n_m \cdot \sigma_{mj}$, ὅπου n_m εἶναι τά συνημίτονα κατεύθυνσης τοῦ διανύσματος n μέ τούς ἄξονες X_1, X_2, X_3. Ἔτσι ἡ συνιστῶσα t_2 τοῦ $\bar{t}$ εἶναι:



$t_2 = n_m \cdot \sigma_{m2} = n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32}$ (τό m εἶναι ἐπαναλαμβανόμενος δείκτης, ἑπομένως θά ἔχουμε ἄθροιση ὅρων πού ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές 1, 2 καί 3 τοῦ m).

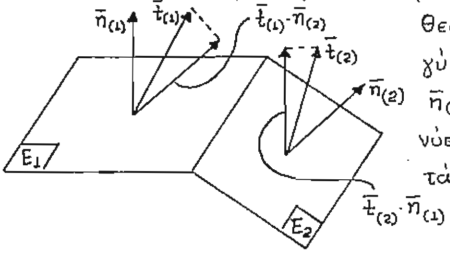
Ἐπίπεδη ἡ διαξονική ἐντατική κατάσταση εἶναι ἐκείνη στήν ὁποία $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, ὁπότε ὁ τανυστής τάσης γίνεται:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Ἀναζητοῦμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων, στό ὁποῖο νά μηδενίζεται ἡ διατμητική τάση. Τό σύστημα αὐτό λέγεται κύριο σύστημα τῆς τάσης καί ἀντιστοιχεῖ σέ γωνία στροφῆς θ, πού δίνεται ἀπό τή σχέση $\tan 2\theta = \dfrac{2 \cdot \sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$. Γιά θετική τιμή τῆς θ στρεφόμαστε ἀριστερόστροφα, ἐνῶ γιά ἀρνητική τιμή τῆς θ στρεφόμαστε δεξιόστροφα.

Γιά τούς κύκλους τοῦ Mohr ἰσχύει ὅ,τι ἀναφέρθηκε στίς παραμορφώσεις, ὅπου βέβαια ἀντί γιά ε_{ij} θά ἔχουμε σ_{ij}. Στήν περίπτωση ὅμως αὐτή στρέφοντας κατά γωνία 2ϕ τήν ἀκτίνα, πού ἀντιστοιχεῖ στήν κατ' ἀπόλυτη τιμή μεγαλύτερη ἀπό τίς ὀρθές τάσεις τοῦ συστήματος (X_1, X_2), παίρνουμε τήν ἀκτίνα πού ἀντιστοιχεῖ στήν κατ' ἀπόλυτη τιμή μεγαλύτερη ἀπό τίς κύριες τάσεις τοῦ συστήματος (X_1', X_2'). [ϕ εἶναι ἡ γωνία, κατά τήν ὁποία στρέφουμε τό σύστημα (X_1, X_2) γιά νά πάρουμε τό κύριο σύστημα τῆς τάσης (X_1', X_2')] (πρβλ. ἄσκηση 1).

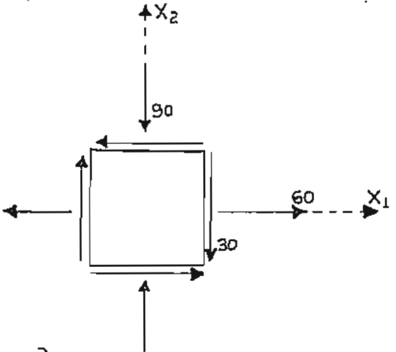
Ὁ γενικός νόμος ἀμοιβαιότητας τῶν τάσεων.

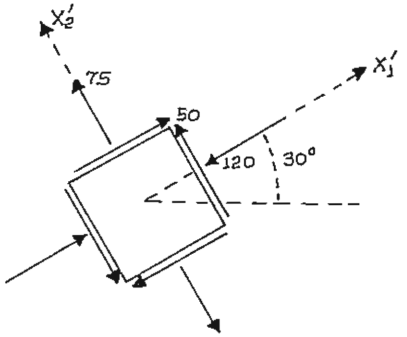


Θεωροῦμε δύο στοιχειώδεις ἐπιφάνειες E_1 καί E_2 γύρω ἀπό ἕνα ὑλικό σημεῖο ἑνός σώματος. Ἄς εἶναι $\bar{n}_{(1)}$, $\bar{n}_{(2)}$ τά ἀντίστοιχα κάθετα μοναδιαῖα διανύσματα καί $\bar{t}_{(1)}, \bar{t}_{(2)}$ τά ἀντίστοιχα διανύσματα τάσης. Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ προβολή τοῦ $\bar{t}_{(1)}$ πάνω στό $\bar{n}_{(2)}$ ἰσοῦται μέ τήν προβολή τοῦ $\bar{t}_{(2)}$ πάνω στό $\bar{n}_{(1)}$, $\bar{t}_{(1)} \cdot \bar{n}_{(2)} = \bar{t}_{(2)} \cdot \bar{n}_{(1)}$. Ἡ πρόταση αὐτή ἀποτελεῖ τό γενικό νόμο ἀμοιβαιότητας τῶν τάσεων, ὁ ὁποῖος στήν περίπτωση πού $\bar{n}_{(1)} \perp \bar{n}_{(2)}$ ἐκφράζει τή συμμετρική ἰδιότητα τοῦ τανυστῆ τάσης, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

ασκηση 1

Νά βρεθεῖ ἡ ἐντατική κατάσταση κατά τή διεύθυνση τῶν ἀξόνων X_1, X_2, πού θά προκύψει ἀπό τήν ἐπαλληλία τῶν δύο ἐντατικῶν καταστάσεων τοῦ σχήματος (οἱ τάσεις δίνονται σέ Kp/cm^2).





λυση

Γιά νά κάνουμε τήν ἐπαλληλία, πρέπει οἱ τάσεις τῶν δύο ἐντατικῶν καταστάσεων νά εἶναι ἐκφρασμένες στό ἴδιο σύστημα συντεταγμένων. Στρέφουμε λοιπόν τό (X_1', X_2') δεξιόστροφα κατά $30°$ [ὥστε νά συμπέσει μέ τό (X_1, X_2)]. Στό νέο αὐτό σύστημα οἱ τάσεις δίνονται ἀπό τίς σχέσεις.

$$\sigma_{11}' = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cdot\cos(-2\theta) + \sigma_{12}\cdot\sin(-2\theta)$$

$$\sigma_{12}' = \sigma_{12}\cdot\cos(-2\theta) - \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cdot\sin(-2\theta) \quad ,$$

ὅπου ἡ γωνία θ παίρνεται ἀρνητική, γιατί στρέφουμε τόν ἄξονα X_1' πρός τήν κατεύθυνση τοῦ ἀρνητικοῦ X_2'. Ἔχουμε λοιπόν:

$$\sigma_{11}' = \frac{-120+75}{2} + \frac{-120-75}{2}\cdot\cos(-60°) + 50\cdot\sin(-60°) = -114,55\ Kp/cm^2$$

$$\sigma_{12}' = 50\cdot\cos(-60°) - \frac{-120-75}{2}\cdot\sin(-60°) = -59,44\ Kp/cm^2$$

Ἡ πρώτη ἀναλλοίωτη τοῦ τανυστῆ τάσης ($Tr\,\underline{\sigma}$) ἔχει τήν ἴδια τιμή καί στό παλιό σύστημα καί στό καινούργιο. Ἐπομένως $\sigma_{11}+\sigma_{22} = \sigma_{11}'+\sigma_{22}'$

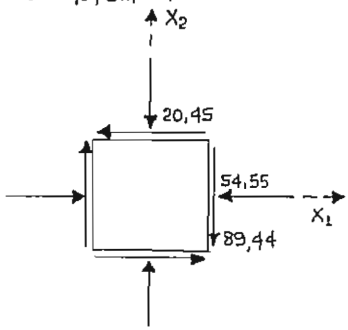
$\Rightarrow -120+75 = -114,55 + \sigma_{22}' \Rightarrow \sigma_{22}' = 69,55\ Kp/cm^2$.

Κάνοντας τώρα τήν ἐπαλληλία ἔχουμε:

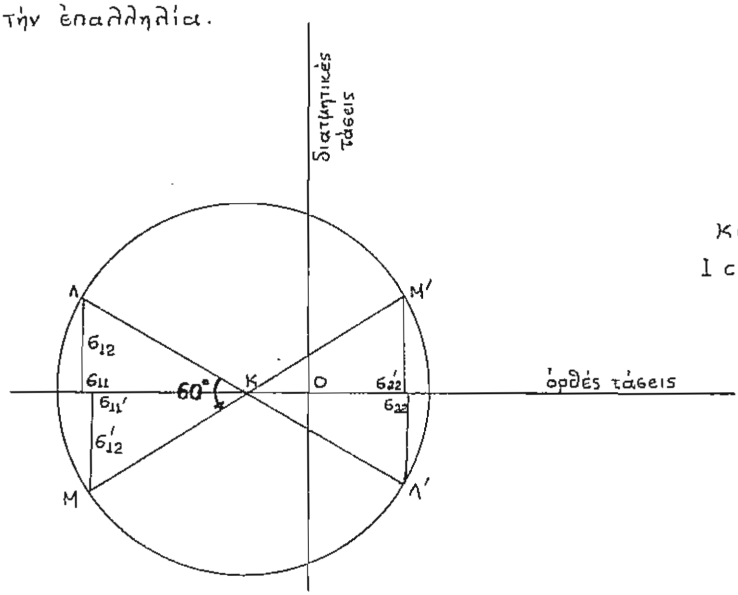
$\sigma_{11,\text{ολ.}} = -114,55 + 60 = -54,55\ Kp/cm^2$

$\sigma_{22,\text{ολ.}} = 69,55 - 90 = -20,45\ Kp/cm^2$

$\sigma_{12,\text{ολ}} = -59,44 - 30 = -89,44\ Kp/cm^2$

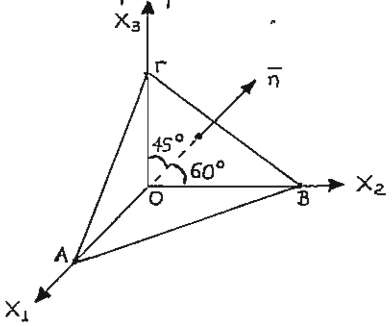


Βέβαια όλα αυτά μπορούν νά γίνουν καί μέ τή γραφική μέθοδο. Στόν άξονα τών ορθών τάσεων παίρνουμε τμήματα $\sigma_{11} = -120$, $\sigma_{22} = 75$. Στήν τετμημένη τής κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερης ορθής τάσης (σ_{11}) παίρνουμε κατά τόν άξονα τών διατμητικών τάσεων τμήμα ίσο μέ τή διατμητική τάση $\sigma_{12} = 50$. Στήν τετμημένη τής άλλης ορθής τάσης (τής σ_{22} , πού είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη) παίρνουμε κατά τόν άξονα τών διατμητικών τάσεων τμήμα ίσο μέ $-\sigma_{12} = -50$. Ορίζονται έτσι τά σημεία Λ , Λ' καί ή ΛΛ' (διάμετρος τού κύκλου Mohr) καθώς επίσης καί τό σημείο τομής τής ΛΛ' καί τού άξονα τών ορθών τάσεων (κέντρο τού κύκλου Mohr). Γράφουμε τώρα τήν περιφέρεια (Κ , ΚΛ) καί έτσι έχει καθοριστεί ό κύκλος Mohr. Ή ΛΛ' είναι ή ευθεία , πού αντιστοιχεί στήν εντατική κατάσταση τού συστήματος (X_1', X_2'). Γιά νά πάρουμε τό σύστημα (X_1, X_2) στρέψαμε τό (X_1', X_2') δεξιόστροφα κατά γωνία $30°$. Στόν κύκλο Mohr στρέφουμε τήν ΛΛ' αριστερόστροφα κατά γωνία $2 \cdot 30° = 60°$ καί έτσι παίρνουμε τήν ΜΜ', ευθεία πού αντιστοιχεί στήν εντατική κατάσταση τού συστήματος (X_1, X_2). Προβάλλοντας τά σημεία Μ, Μ' στόν άξονα τών ορθών τάσεων βρίσκουμε $\sigma_{11}' \simeq -115$ Kp/cm², $\sigma_{22}' \simeq 70$ Kp/cm². Παρατηρούμε ότι στρέφοντας κατά γωνία $2 \cdot 30° = 60°$ τήν ακτίνα ΚΛ, πού αντιστοιχεί στήν κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από τίς ορθές τάσεις τού συστήματος (X_1', X_2') , παίρνουμε τήν ακτίνα ΚΜ, πού αντιστοιχεί στήν κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από τίς ορθές τάσεις τού συστήματος (X_1, X_2). Ή διατμητική τάση τού συστήματος (X_1, X_2) είναι αυτή πού αντιστοιχεί στό σημείο Μ , οπότε βρίσκουμε $\sigma_{12}' \simeq -60$ Kp/cm². Γνωρίζοντας τώρα τίς τιμές τών σ_{11}' , σ_{22}' , σ_{12}' κάνουμε, όπως πρίν, τήν επαλήθευση.



κλιμακα :
1 cm → 40 Kp/cm² .

ασκηση 2



Γιά τό ἀπειροστό τετράεδρο τοῦ σχήματος, τοῦ ὁποίου τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα $\bar{n}$ σχηματίζει μέ τούς ἄξονες X_2, X_3, γωνίες 60° καί 45° ἀντίστοιχα, οἱ συνιστῶσες τοῦ τανυστῆ τάσης εἶναι:

$\sigma_{11} = 15\ \mathrm{Kp/cm^2}$, $\sigma_{12} = 3\ \mathrm{Kp/cm^2}$

$\sigma_{22} = -7{,}5\ \mathrm{Kp/cm^2}$, $\sigma_{23} = 0$

$\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{31} = -6\ \mathrm{Kp/cm^2}$.

Νά βρεθοῦν: **α.** τό διάνυσμα ὁλικῆς τάσης στό ἐπίπεδο ΑΒΓ, **β.** ἡ ὀρθή καί ἡ διατμητική συνιστῶσα τοῦ ἴδιου διανύσματος.

λυση

α. Τά συνημίτονα κατεύθυνσης τοῦ $\bar{n}$ μέ τούς ἄξονες X_2 καί X_3 εἶναι $n_2 = \frac{1}{2}$ καί $n_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ἀντίστοιχα. Τό n_1 θά βρεθεῖ ἀπό τή σχέση

$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_1 = \pm\frac{1}{2}$, ὅπου δεχόμαστε μόνο τή θετική τιμή, $n_1 = \frac{1}{2}$, ἐπειδή εἶναι καθορισμένη ἡ θέση τοῦ $\bar{n}$ ὡς πρός τούς ἄξονες X_2, X_3.

Ὁ τανυστής τάσης εἶναι $\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Vmatrix} 15 & 3 & -6 \\ 3 & -7{,}5 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

Γιά τήν τομή $\bar{n}$ τό διάνυσμα τῆς τάσης $\bar{t}$ ἔχει συνιστῶσες, πού δίνονται ἀπό τή σχέση $t_j = n_m \cdot \sigma_{mj}$. Ἑπομένως:

$$t_1 = \frac{1}{2}\cdot 15 + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-6) = 4{,}76$$

$$t_2 = \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot(-7{,}5) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 = -2{,}25$$

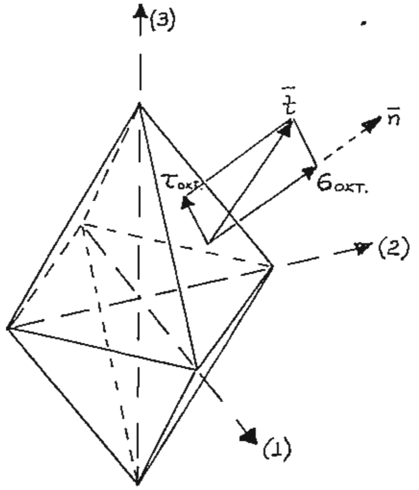
$$t_3 = \frac{1}{2}\cdot(-6) + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 = -3$$

Τό μέτρο τοῦ διανύσματος ὁλικῆς τάσης εἶναι $t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} = \sqrt{4{,}76^2 + (-2{,}25)^2 + (-3)^2} = 6{,}06\ \mathrm{Kp/cm^2}$.

β. Ἡ ὀρθή συνιστῶσα τοῦ διανύσματος ὁλικῆς τάσης εἶναι $\sigma = \bar{t}\cdot\bar{n} = t_1\cdot n_1 + t_2\cdot n_2 + t_3\cdot n_3 = -0{,}87\ \mathrm{Kp/cm^2}$.

Ἡ διατμητική συνιστῶσα προκύπτει ἀπό τή σχέση $\tau = \sqrt{t^2 - \sigma^2} = 5{,}60\ \mathrm{Kp/cm^2}$.

ασκηση 3



Θεωροῦμε τὸ κανονικὸ ὀκτάεδρο τοῦ σχήματος, στὸ ὁποῖο οἱ τρεῖς κύριοι ἄξονες συμμετρίας συμπίπτουν μὲ τοὺς κυρίους ἄξονες τῆς τάσης.

Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι:

$$\sigma_{\text{οκτ.}} = \frac{I_1}{3}\,, \quad \tau_{\text{οκτ.}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{I_1^2}{3} - I_2\right)} \quad \text{ὅπου}$$

$\sigma_{\text{οκτ.}}$ καὶ $\tau_{\text{οκτ.}}$ ἡ ὀρθὴ καὶ ἡ διατμητικὴ συνιστῶσα τοῦ διανύσματος τῆς τάσης σὲ μιὰ ὁποιαδήποτε ἕδρα καὶ I_1, I_2, οἱ 2 πρῶτες ἀναλλοίωτες ποσότητες τοῦ Τανυστῆ τῆς τάσης (Δίνεται ὅτι τὰ συνημίτονα κατεύθυνσης τοῦ διανύσματος $\bar{n}$ μὲ τοὺς ἄξονες (1), (2) καὶ (3) εἶναι $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$).

λυση

Τὸ σύστημα τῶν (1), (2) καὶ (3) εἶναι κύριο σύστημα, ἐπομένως ἡ ἔκφραση τοῦ Τανυστῆ τάσης στὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix}$$

Τὸ διάνυσμα τῆς τάσης σὲ μιὰ ὁποιαδήποτε ἕδρα ἔχει συνιστῶσες, ποὺ δίνονται ἀπὸ τὴ σχέση $t_j = n_m \cdot \sigma_{mj}$, καὶ ἐπομένως $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\sigma_{11}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_{22}$, $t_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_{33}$ καὶ $t_{\text{οκτ.}} = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} = \sqrt{\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}{3}}$

Ἡ ὀρθὴ συνιστῶσα τοῦ διανύσματος τῆς τάσης εἶναι

$$\sigma_{\text{οκτ.}} = \bar{t}_{\text{οκτ.}} \cdot \bar{n} = t_1 \cdot n_1 + t_2 \cdot n_2 + t_3 \cdot n_3 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3}$$

Ἡ διατμητικὴ συνιστῶσα εἶναι $\tau_{\text{οκτ.}} = \sqrt{t_{\text{οκτ.}}^2 - \sigma_{\text{οκτ.}}^2} =$

$$= \sqrt{\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}{3} - \frac{I_1^2}{9}} = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - 2(\sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + \sigma_{22} \cdot \sigma_{33} + \sigma_{33} \cdot \sigma_{11})}{3} - \frac{I_1^2}{9}} =$$

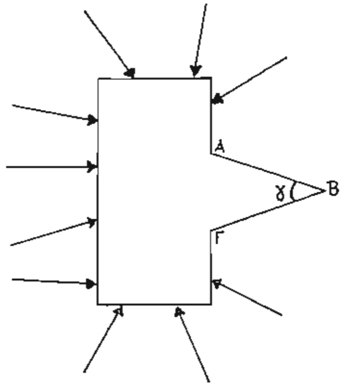
$$= \sqrt{\frac{I_1^2 - 2 I_2}{3} - \frac{I_1^2}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9} I_1^2 - \frac{2}{3} I_2} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{I_1^2}{3} - I_2\right)}\,, \quad \text{διότι}$$

ἡ δεύτερη ἀναλλοίωτη τοῦ τανυστῆ τάσης εἶναι :

$$I_2 = \sigma_{11}\cdot\sigma_{22} + \sigma_{22}\cdot\sigma_{33} + \sigma_{33}\cdot\sigma_{11} - \underbrace{\cancel{\sigma_{12}^2}}_{0} - \underbrace{\cancel{\sigma_{23}^2}}_{0} - \underbrace{\cancel{\sigma_{31}^2}}_{0} =$$

$$= \sigma_{11}\cdot\sigma_{22} + \sigma_{22}\cdot\sigma_{33} + \sigma_{33}\cdot\sigma_{11} \, .$$

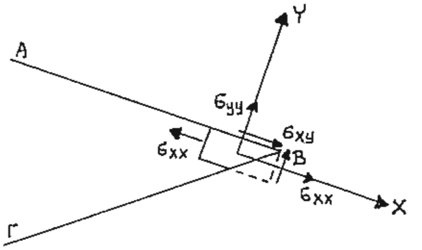
ασκηση 4

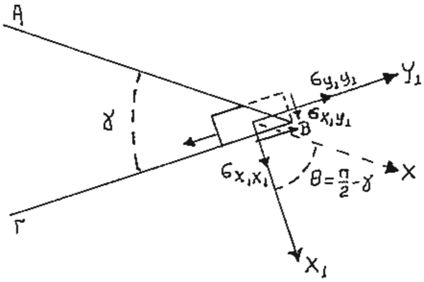


Τό σῶμα τοῦ σχήματος ὑπόκειται σέ ἐπίπεδη καταπόνηση. Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ $0<\gamma<\pi$ καί οἱ πλευρές ΑΒ, ΒΓ δέν φορτίζονται μέ ἐξωτερικές δυνάμεις. Νά δειχτεῖ ὅτι οἱ τρεῖς συνιστῶσες τῆς τάσης στήν κορυφή Β εἶναι μηδενικές.

λυση

Θεωροῦμε ἕνα κομμάτι τοῦ σώματος γύρω ἀπό τήν κορυφή Β. Μέ ἁπλές παρατηρήσεις γιά τήν καταπόνηση, πού ὑφίσταται τό κομμάτι αὐτό, καί μέ μετασχηματισμούς μεταξύ καρτεσιανῶν συστημάτων θά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ τάσεις στήν κορυφή Β εἶναι μηδενικές.





Ἔστω σύστημα συντεταγμένων (X, Y) (σχῆμα ἀριστερά). Ἡ ἐπιφάνεια ΑΒ εἶναι ἀφόρτιστη, ἑπομένως $\sigma_{yy}=0$. Γιά τόν ἴδιο λόγο καί $\sigma_{xy}=0$. Τήν σ_{xx} δέν μποροῦμε νά τήν προσδιορίσουμε. Θεωροῦμε, λοιπόν, καί τό σύστημα συντεταγμένων (X_1, Y_1) στραμμένο ὡς πρός τό (X,Y) κατά γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}-\gamma$ (σχῆμα δεξιά). Ἐπειδή ἡ ἐπιφάνεια ΒΓ εἶναι ἀφόρτιστη θά ἔχουμε $\sigma_{x_1x_1}=0$, $\sigma_{x_1y_1}=0$, ἐνῶ τήν $\sigma_{y_1y_1}$ δέν μποροῦμε νά τήν προσδιορίσουμε. Ἡ $\sigma_{x_1x_1}$ ἀπό τούς τύπους μετασχηματισμοῦ εἶναι

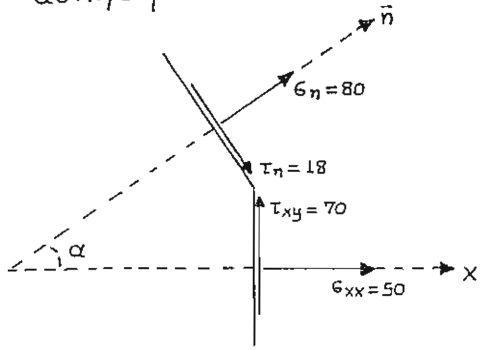
$$\sigma_{x_1x_1} = \sigma_{xx}\cdot\cos^2\theta + \sigma_{yy}\cdot\sin^2\theta + \sigma_{xy}\cdot\sin 2\theta \quad ἤ$$

$$\sigma_{x_1x_1} = \sigma_{xx}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) + \sigma_{yy}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) + \sigma_{xy}\cdot\sin(\pi-2\gamma) \quad ἤ$$

$$\sigma_{x_1x_1} = \sigma_{xx}\cdot\sin^2\gamma + \sigma_{yy}\cdot\cos^2\gamma + \sigma_{xy}\cdot\sin 2\gamma \quad (1)$$

Εἶναι ὅμως $\sigma_{x_1x_1}=0$, $\sigma_{yy}=0$, $\sigma_{xy}=0$ καί $\sin\gamma\neq 0$ διότι $0<\gamma<\pi$. Ἑπομένως γιά νά ἀληθεύει ἡ (1) θά πρέπει νά εἶναι καί $\sigma_{xx}=0$.
Καί οἱ τρεῖς, λοιπόν, συνιστῶσες τῆς τάσης στήν κορυφή Β εἶναι μηδενικές.

ασκηση 5



Σέ 2 ἐπίπεδες τομές, τῶν ὁποίων τά κάθετα διανύσματα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία α, ἀναπτύσσονται οἱ τάσεις τοῦ σχήματος. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία α.

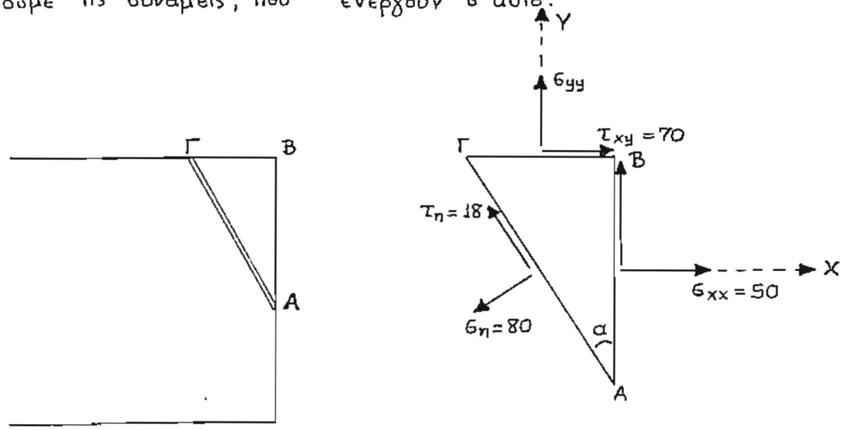
α. μέ τήν ἐξέταση τῆς ἰσορροπίας ἀπειροστοῦ στοιχείου (τριγώνου),

β. μέ ἐφαρμογή τοῦ γενικοῦ νόμου ἀμοιβαιότητας τῶν τάσεων.

(Οἱ τάσεις δίνονται σέ Kp/cm^2).

λυση

α. Θεωροῦμε τίς 2 τομές ὡς τμῆμα ἑνός σώματος ἀπό τό ὁποῖο ἔχουμε ἀφαιρέσει τό τρίγωνο ΑΒΓ. Ἀπομονώνουμε τό τρίγωνο αὐτό καί σχεδιάζουμε τίς δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν σ' αὐτό.



Ἔστω ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος ἴσο μέ τή μονάδα, ὁπότε $AB=\cos\alpha$, $B\Gamma=\sin\alpha$. Ἡ συνισταμένη ὀρθή δύναμη στήν πλευρά ΑΒ εἶναι $AB\cdot\sigma_{xx}=$ $=\cos\alpha\cdot\sigma_{xx}$ καί ἡ συνισταμένη διατμητική δύναμη στήν πλευρά ΒΓ εἶναι $B\Gamma\cdot\tau_{xy}=\sin\alpha\cdot\tau_{xy}$. Στήν πλευρά ΑΓ ἡ συνισταμένη ὀρθή δύναμη εἶναι $1\cdot\sigma_n$ καί ἡ συνισταμένη διατμητική δύναμη $1\cdot\tau_n$.

Παίρνοντας, λοιπόν, τὴν ἰσορροπία δυνάμεων κατὰ τὸν ἄξονα X ἔχουμε:

$$\sigma_{xx} \cdot \cos a + \tau_{xy} \cdot \sin a - \sigma_\eta \cdot \cos a - \tau_\eta \cdot \sin a = 0 \Rightarrow$$

$$50 \cdot \cos a + 70 \cdot \sin a - 80 \cdot \cos a - 18 \cdot \sin a = 0 \Rightarrow 52 \cdot \sin a = 30 \cdot \cos a \Rightarrow$$

$$\tan a = \frac{30}{52} = 0{,}58 \Rightarrow a = 30^\circ .$$

β. Οἱ συνιστῶσες τῆς τάσης στὴν τομὴ **n** εἶναι σ_η καὶ τ_η. Στὴν τομὴ X εἶναι σ_{xx} καὶ τ_{xy}. Σύμφωνα μὲ τὸ γενικὸ νόμο ἀμοιβαιότητας τῶν τάσεων ἡ προβολὴ τῶν σ_η, τ_η στὴν κατεύθυνση X θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν προβολὴ τῶν σ_{xx}, τ_{xy} στὴν κατεύθυνση n. Ἑπομένως

$$\sigma_\eta \cdot \cos a + \tau_\eta \cdot \sin a = \sigma_{xx} \cdot \cos a + \tau_{xy} \cdot \sin a \Rightarrow$$

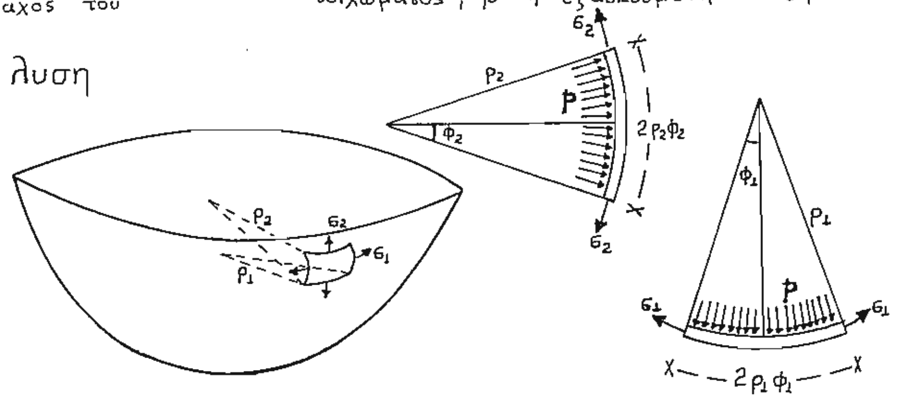
$$80 \cdot \cos a + 18 \cdot \sin a = 50 \cdot \cos a + 70 \cdot \sin a \Rightarrow 30 \cdot \cos a = 52 \cdot \sin a \Rightarrow$$

$$\tan a = \frac{30}{52} = 0{,}58 \Rightarrow a = 30^\circ .$$

ασκηση 6

Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι σὲ δοχεῖα, τῶν ὁποίων τὰ τοιχώματα ἀποτελοῦν ἐπιφάνειες ἐκ περιστροφῆς καὶ τὰ ὁποῖα ὑποβάλλονται σὲ ἐσωτερικὴ ἢ ἐξωτερικὴ πίεση συμμετρικὰ διανεμημένη ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τοῦ δοχείου, οἱ κύριες τάσεις ποὺ ἀναπτύσσονται στὰ τοιχώματα δίνονται ἀπὸ τὸν τύπο $\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{t}$, ὅπου ρ_1, ρ_2 οἱ ἀκτῖνες καμπυλότητας, t τὸ πάχος τοῦ τοιχώματος, p ἡ ἐξασκούμενη πίεση.

λυση



Θὰ παραδεχτοῦμε ὅτι οἱ τάσεις διανέμονται ὁμοιόμορφα κατὰ τὸ πάχος t. Ἐπίσης ὅτι $\rho_1 \gg t$ καὶ $\rho_2 \gg t$, δηλαδὴ ὅτι τὸ t εἶναι πολὺ μικρότερο ἀπὸ τὰ ρ_1, ρ_2. Δοχεῖα, συνεπῶς, αὐτοῦ τοῦ εἴδους δὲν μποροῦν νὰ παραλάβουν διατμητικὲς τάσεις, ἀλλὰ μόνο ὀρθές.

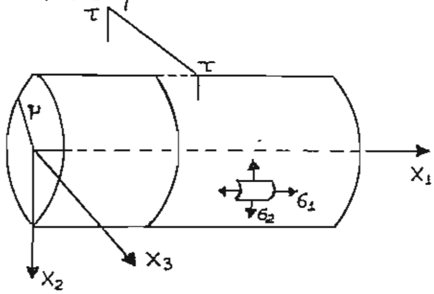
Θεωροῦμε πάνω στὸ δοχεῖο ἕνα στοιχειῶδες τμῆμα. Ἀπομονώνουμε σὲ ἐπὶ μέρους σχήματα τὶς 2 λωρίδες κατὰ τὶς ἀκτῖνες καμπυλότητας. Ἀναλύουμε τὶς σ_2 σὲ ὁριζόντιες καὶ κατακόρυφες συνιστῶσες. Οἱ κατακόρυφες συνιστῶσες ἀλληλοαναιροῦνται.

Ἡ ἐσωτερική πίεση p θά ἰσορροπηθεῖ ἀπό τίς ὁριζόντιες συνιστῶσες τῶν σ_2, πού ἡ καθεμιά εἶναι $\sigma_2 \cdot \sin\phi_2 \simeq \sigma_2 \cdot \phi_2$. Ἀντίστοιχη συνθήκη ἰσχύει καί γιά τήν σ_1. Θεωρώντας, λοιπόν, τήν ἰσορροπία τοῦ στοιχειώδους τμήματος ἔχουμε:
$p \cdot 2\rho_1\phi_1 \cdot 2\rho_2\phi_2 = 2\sigma_2\phi_2 \cdot 2\rho_1\phi_1 \cdot t + 2\sigma_1\phi_1 \cdot 2\rho_2\phi_2 \cdot t$ (1), ὅπου στό δεύτερο μέλος γιά νά πάρουμε τίς συνισταμένες δυνάμεις τῶν τάσεων πολλαπλασιάζουμε τό μῆκος τῆς λωρίδας $(2\rho_1\phi_1)$ ἐπί τό πάχος (t), ἐπί τήν τιμή τῆς τάσης $(\sigma_2\phi_2)$ καί ἐπί τόν συντελεστή 2, γιατί γιά κάθε λωρίδα ἔχουμε 2 συνιστῶσες τῶν τάσεων. Διαιρώντας τήν (1) μέ $4\rho_1\rho_2\phi_1\phi_2 t$ παίρνουμε $\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{t}$.

ασκηση 7

Θεωροῦμε χαλύβδινο κυλινδρικό λέβητα, ὁ ὁποῖος καταπονεῖται ἀπό ὁμοιόμορφη ἐσωτερική πίεση $p = 10\ kp/cm^2$. Ἡ διάμετρος τοῦ λέβητα εἶναι 1 m, τό μῆκος του 2 m καί τό πάχος του 5 mm. Ζητοῦνται: **α.** ἡ ἐντατική κατάσταση σέ τυχόν σημεῖο τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας γιά σύστημα ἀξόνων κατά γενέτειρα καί παράλληλο κύκλο, **β.** ἡ ἐντατική κατάσταση στό ἴδιο σημεῖο γιά σύστημα ἀξόνων στραμμένο κατά 30° ἀριστερόστροφα σέ σχέση μέ τό προηγούμενο.

λυση



Θεωροῦμε σύστημα ἀξόνων (X_1, X_2, X_3) κατά γενέτειρα καί παράλληλο κύκλο. Ἐφαρμόζουμε τόν τύπο, πού ἀποδείξαμε στήν προηγούμενη ἄσκηση.

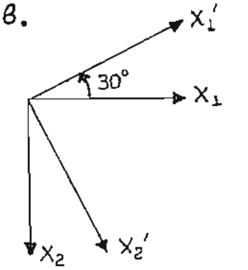
$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{t}.$$

Ἐδῶ $\rho_1 = \infty \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\rho_1} = 0$, $\rho_2 = r$ καί ἑπομένως $\frac{\sigma_2}{r} = \frac{p}{t} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{p \cdot r}{t} = \frac{10\ kp/cm^2 \cdot 50\ cm}{0{,}5\ cm} = 1000\ kp/cm^2$.

Μέ τήν ἐπίπεδη τομή ττ διαχωρίζουμε τό λέβητα σέ 2 τμήματα. Θεωροῦμε τήν ἰσορροπία τοῦ ἑνός ἀπό αὐτά, π.χ. τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος. Λόγω τῆς συμμετρίας γύρω ἀπό τόν ἄξονα τοῦ λέβητα ἡ συνισταμένη δύναμη, πού ὀφείλεται στήν πίεση p, θά ἔχει τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα καί μέτρο ἴσο μέ $\pi r^2 p$. Αὐτή θά ἐξουδετερωθεῖ ἀπό τή δύναμη, πού διαβιβάζεται ἀπό τή διατομή. Ἑπομένως $2\pi r t \sigma_1 = \pi r^2 p \Rightarrow \sigma_1 = \frac{p \cdot r}{2t} = \frac{10\ kp/cm^2 \cdot 50\ cm}{2 \cdot 0{,}5\ cm}$ $= 500\ kp/cm^2$.

Λόγω τῆς συμμετρίας ὡς πρός τό ἐπίπεδο (X_1, X_2) ἡ συνισταμένη δύναμη τῆς ἐσωτερικῆς πίεσης κατά τήν κατεύθυνση X_3 εἶναι μηδενική. Ἑπομένως μηδενική θά εἶναι καί ἡ τάση κατά τήν κατεύθυνση αὐτή, $\sigma_3 = 0$. Γιά τυχόν σημεῖο, λοιπόν, τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας ἡ ἐντατική κατάσταση εἶναι: $\sigma_1 = \dfrac{p \cdot r}{2t} = 500\ kp/cm^2$, $\sigma_2 = \dfrac{p \cdot r}{t} = 1000\ kp/cm^2$, $\sigma_3 = 0$.

β.



Γιά σύστημα ἀξόνων (X_1', X_2') στραμμένο ἀριστερόστροφα κατά 30° ὡς πρός τό (X_1, X_2) θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\sigma_1' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-60^\circ) + \underbrace{\cancel{\sigma_{12}}}_{0} \cdot \sin(-60^\circ)$$

$$\tau' = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-60^\circ) + \underbrace{\cancel{\sigma_{12}}}_{0} \cdot \cos(-60^\circ)$$

, ὅπου ἡ γωνία στροφῆς παίρνεται ἀρνητική, γιατί γιά νά πάρουμε τόν X_1' στρέφουμε τόν X_1 πρός τήν κατεύθυνση τοῦ ἀρνητικοῦ X_2.

Προκύπτει $\sigma_1' = 625\ kp/cm^2$, $\tau = 216,50\ kp/cm^2$.

Ἀπό τήν πρώτη ἀναλλοίωτη τοῦ τανυστῆ τάσης ἔχουμε:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_1' + \sigma_2' \Rightarrow \sigma_2' = 875\ kp/cm^2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Κάθε συνιστῶσα τοῦ τανυστῆ τάσης μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ σάν μιά συνάρτηση ὅλων τῶν συνιστωσῶν τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης. Ἄν χρησιμοποιήσουμε μιά συνάρτηση $\underset{\sim}{f}$, πού λέγεται τανυστική συνάρτηση, τότε ἡ προηγούμενη πρόταση μπορεῖ νά γραφτεῖ σέ μητρωική μορφή: $\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{\varepsilon})$. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι γνωστή σάν καταστατική ἐξίσωση τοῦ ὑλικοῦ, πού ἐξετάζουμε, ἐνῶ ἡ συνάρτηση $\underset{\sim}{f}$ (πού περιγράφει τήν καταστατική ἐξίσωση) λέγεται καί καταστατική συνάρτηση.

Οἱ ἐλαστικές σταθερές, πού χρησιμοποιοῦμε στήν πράξη, εἶναι: E (μέτρο τοῦ Young), ν (λόγος τοῦ Poisson), G (μέτρο στρέψης). Ἀπό αὐτές μόνο οἱ δύο εἶναι ἀνεξάρτητες, ἐνῶ ἡ τρίτη ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν ἄλλων δύο. Ἔτσι τό μέτρο στρέψης G ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν E καί ν ἀπό τή σχέση $G=\dfrac{E}{2\cdot(1+\nu)}$.

Μέ τή βοήθεια τῶν ἐλαστικῶν αὐτῶν σταθερῶν οἱ παραμορφώσεις ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν τάσεων γιά σύστημα ἀξόνων XYZ ἀπό τίς ἀκόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}-\nu\cdot(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right]$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}-\nu\cdot(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})\right]$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}-\nu\cdot(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]$$

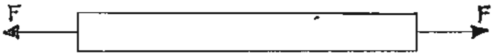
$$\varepsilon_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zx}=\frac{\sigma_{zx}}{2G}$$

Ἡ ἀρχή τοῦ Saint-Vénant: Ἄν σ᾽ ἕνα τμῆμα ἑνός σώματος ἐπιδράσουν διαδοχικά δύο στατικά ἰσοδύναμα συστήματα δυνάμεων, τότε σέ περιοχές τοῦ σώματος ἀπομακρυσμένες ἀπό τά σημεῖα δράσης αὐτῶν τῶν δυνάμεων ἡ ἐπίδραση τῶν δύο συστημάτων εἶναι οὐσιαστικά ἡ ἴδια.

ασκηση 1



Γιά τήν ἀξονική ἐφελκυόμενη ράβδο τοῦ σχήματος μετρήθηκε ἀνηγμένη ἐπιμήκυνση $\varepsilon = 0{,}001$ καί λόγος ἀνηγμένης μεταβολῆς ἐπιφάνειας διατομῆς πρός ἀνηγμένη μεταβολή ὄγκου $\dfrac{\frac{\Delta A}{A}}{\frac{\Delta V}{V}} = -\dfrac{3}{4}$. Ζητοῦνται τό μέτρο ἐλαστικότητας καί ὁ λόγος τοῦ Poisson τοῦ ὑλικοῦ. Δίνεται ὅτι $F = 8{,}4\ t$, $A = 4\ cm^2$.

λυση

Ἡ ἀνηγμένη ἀξονική μήκυνση εἶναι $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} \Rightarrow E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{F}{A\cdot\varepsilon} = \dfrac{8{,}4\ t}{4 cm^2\cdot 0{,}001} = 2100\ t/cm^2$.

Ἡ ἀνηγμένη μεταβολή ὄγκου εἶναι $\dfrac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, ὅπου $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\cdot\varepsilon$, συνεπῶς $\dfrac{\Delta V}{V} = \varepsilon - \nu\cdot\varepsilon - \nu\cdot\varepsilon = \varepsilon\cdot(1-2\nu)$. Ἡ ἀνηγμένη μεταβολή ἐπιφάνειας διατομῆς εἶναι $\dfrac{\Delta A}{A} = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -2\cdot\nu\cdot\varepsilon$. Εἶναι ἐπομένως:
$-\dfrac{3}{4} = \dfrac{-2\cdot\nu\cdot\varepsilon}{\varepsilon(1-2\nu)} \Rightarrow \nu = \dfrac{3}{14} = 0{,}21$.

ασκηση 2

Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἕνα ὀρθότροπο ὑλικό εἶναι ἀσυμπίεστο (δηλαδή ὁ ὄγκος του δέν ἀλλάζει ὑπό ὁποιαδήποτε ἐντατική κατάσταση), ἄν οἱ ἐλαστικοί συντελεστές ἱκανοποιοῦν τίς συνθῆκες:

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} = 0$$
$$\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} = 0$$
$$\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} = 0\ .$$

Νά βρεθεῖ ἡ ἀντίστοιχη συνθήκη γιά ἰσότροπα ὑλικά.

λυση

Ἡ σχέση πού δίνει τίς συνιστῶσες παραμόρφωσης συναρτήσει τῶν ἐλαστικῶν συντελεστῶν καί τῶν συνιστωσῶν τοῦ τανυστῆ τάσης εἶναι:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{66} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Vmatrix}$$

, ὅπου α_{ij} οἱ ἐλαστικοί συντελεστές.

Κάνοντας τίς πράξεις βρίσκουμε:

$\varepsilon_{11} = \alpha_{11} \cdot \sigma_{11} + \alpha_{12} \cdot \sigma_{22} + \alpha_{13} \cdot \sigma_{33}$.

$\varepsilon_{22} = \alpha_{21} \cdot \sigma_{11} + \alpha_{22} \cdot \sigma_{22} + \alpha_{23} \cdot \sigma_{33}$.

$\varepsilon_{33} = \alpha_{31} \cdot \sigma_{11} + \alpha_{32} \cdot \sigma_{22} + \alpha_{33} \cdot \sigma_{33}$.

Ἐξετάζουμε ἀσυμπίεστα ὀρθότροπα ὑλικά $\Rightarrow \Theta = 0 \Rightarrow Tr\underset{\sim}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{11}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}) + \sigma_{22}(\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}) +$
$+ \sigma_{33}(\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}) = 0, (1)$.

Ἡ (1) πρέπει νά ἰσχύει γιά ὁποιεσδήποτε τιμές τῶν $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$. Ἔστω $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{11} \neq 0$. Τότε γιά νά ἰσχύει ἡ (1) θά πρέπει: $\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} = 0$. Μέ ὅμοιους συλλογισμούς προκύπτει: $\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} = 0$, $\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} = 0$.

Γιά ἰσότροπα ὑλικά θά ἔχουμε:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right]$$

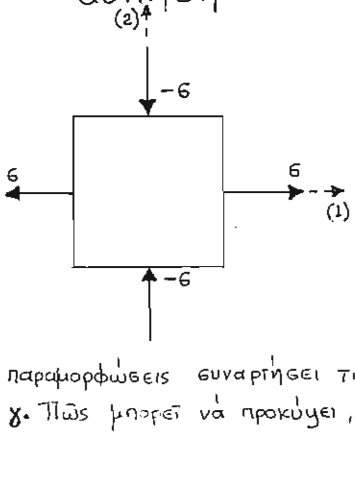
Ἡ συνθήκη $\Theta = 0$ δίνει: $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma_{11} \cdot \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu}{E} - \frac{\nu}{E}\right) + \sigma_{22} \cdot \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu}{E} - \frac{\nu}{E}\right) + \sigma_{33} \cdot \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu}{E} - \frac{\nu}{E}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \cdot \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu}{E} - \frac{\nu}{E}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{E} - \frac{\nu}{E} - \frac{\nu}{E} = 0 \Rightarrow \frac{1-2\nu}{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2\nu = 0 \Rightarrow \nu = 0,5 .$$

ασκηση 3



Λέμε ὅτι ἡ καταπόνηση ἑνός σώματος ἰσοδυναμεῖ μέ μιά κατάσταση καθαρῆς διάτμησης, ὅταν μποροῦμε νά βροῦμε 2 κάθετες τομές, στίς ὁποῖες νά μηδενίζονται οἱ ὀρθές τάσεις.

α. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ἐντατική κατάσταση τοῦ σχήματος ἰσοδυναμεῖ μέ μιά κατάσταση καθαρῆς διάτμησης.

β. Νά βρεθοῦν οἱ μέγιστες ὀρθές καί διατμητικές παραμορφώσεις συναρτήσει τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν E, ν, G.

γ. Πῶς μπορεῖ νά προκύψει, μέ βάση τά προηγούμενα ἐρωτήματα, ὁ τύπος $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$;

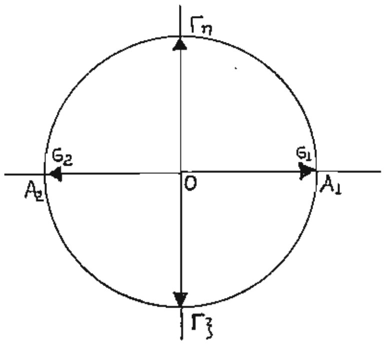
λυση

Ἔστω ὅτι ἄν στρέψουμε τό σῶμα κατά γωνία θ, θά μηδενίζονται οἱ ὀρθές τάσεις. Στή νέα αὐτή θέση ἡ ὀρθή τάση δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\sigma' = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cdot\cos 2\theta + \sigma_{12}\cdot\sin 2\theta \quad (1)$$

, ὅπου $\sigma_{11}=\sigma$, $\sigma_{22}=-\sigma$, $\sigma_{12}=0$.

Θέλουμε $\sigma'=0$, ἑπομένως ἡ (1) γίνεται: $0=\sigma\cdot\cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm 45^\circ$. Ἡ μιά τομή ἀντιστοιχεῖ σέ γωνία $\theta=45^\circ$, ἡ ἄλλη σέ γωνία $\theta=-45^\circ$. Ἑπομένως οἱ 2 τομές εἶναι κάθετες μεταξύ τους.



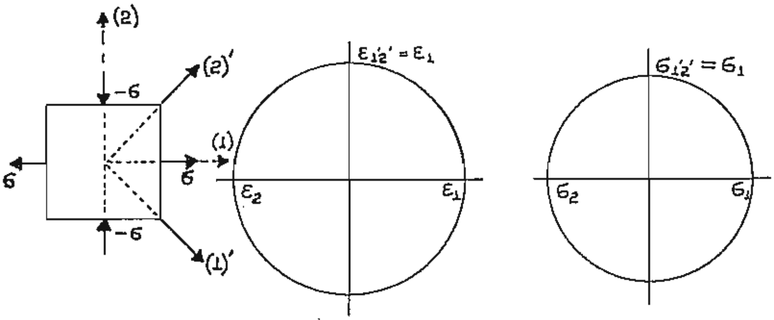
Στή γραφική λύση κατασκευάζουμε τόν κύκλο Mohr μέ $\sigma_1=\sigma$, $\sigma_2=-\sigma$, διότι ἡ δοσμένη ἐντατική κατάσταση τοῦ σχήματος ἀντιστοιχεῖ στό κύριο σύστημα ἀξόνων καί ἑπομένως οἱ σ καί $-\sigma$ εἶναι οἱ κύριες τάσεις.

Τά σημεῖα Γ_η καί Γ_ζ ἔχουν μόνο διατμητικές τάσεις καί ἀντιστοιχοῦν σέ τομές κάθετες μεταξύ τους.

β.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma - \nu\cdot(-\sigma)\right] = \frac{\sigma}{E}\cdot(1+\nu),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot\left[-\sigma - \nu\cdot\sigma\right] = -\frac{\sigma}{E}(1+\nu) \quad \text{καί ἡ} \quad \varepsilon_{12}=0.$$

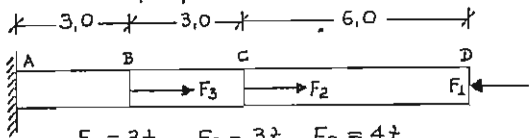


Μέγιστη ὀρθή παραμόρφωση ἔχουμε στό σύστημα (1),(2) καί $\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}\cdot(1+\nu)$ ἐνῶ μέγιστη διατμητική παραμόρφωση ἔχουμε στό σύστημα (1)', (2)' καί $\varepsilon_{1'2'} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}(1+\nu)$.

γ. Εἶναι: $\varepsilon_{1'2'} = \frac{\sigma_{1'2'}}{2G}$, $\varepsilon_{1'2'} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}\cdot(1+\nu)$, $\sigma_{1'2'} = \sigma_1 = \sigma$, ἑπομένως

$$\frac{\sigma}{E}(1+\nu) = \frac{\sigma}{2G} \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

ασκηση 4



$F_1 = 3t$, $F_2 = 3t$, $F_3 = 4t$.

Ἡ ἀξονικὰ καταπονούμενη ράβδος AD δέχεται φορτία κατανεμημένα ὅπως στὸ σχῆμα. Ζητοῦνται:

α. Ἡ συνολικὴ μεταβολὴ μήκους $\Delta \ell_{ολ}$ καὶ ἡ συνολικὴ μεταβολὴ ὄγκου $\Delta V_{ολ}$.

β. Σὲ ποιὰ θέση πρέπει νὰ ἐφαρμοστεῖ ἡ F_3, γιὰ νὰ ἔχουμε $\Delta \ell_{ολ} = 0$;

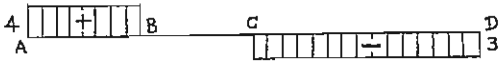
γ. Τὸ διάγραμμα μεταβολῆς μηκῶν κατὰ μῆκος τῆς ABCD. Σὲ ποιὰ θέση ἡ μεταβολὴ μήκους εἶναι μηδενική;

Δίνεται τὸ ἐμβαδὸ διατομῆς $A = 10\ cm^2$, τὸ μέτρο τοῦ Young $E = 2{,}1 \cdot 10^6\ Kp/cm^2$, ὁ λόγος τοῦ Poisson $\nu = 0{,}28$.

λυση

α. Ἡ συνολικὴ μεταβολὴ μήκους δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση $\Delta \ell_{ολ.} = \Delta \ell_{AB} + \Delta \ell_{BC} + \Delta \ell_{CD}$ (1), ὅπου $\Delta \ell_{AB}$ ἡ συνολικὴ μεταβολὴ μήκους, ἡ ὁποία προκαλεῖται στὸ τμῆμα AB ἀπὸ ὅλες τὶς δυνάμεις συγχρόνως.

$$\Delta \ell_{AB} = \varepsilon_{AB} \cdot \ell_{AB}$$
$$\Delta \ell_{BC} = \varepsilon_{BC} \cdot \ell_{BC}$$
$$\Delta \ell_{CD} = \varepsilon_{CD} \cdot \ell_{CD}, \text{ ἑπομένως}$$



N

$$\Delta \ell_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} \cdot \ell_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot \ell_{AB}}{A \cdot E} = \frac{4t \cdot 300\ cm}{10\ cm^2 \cdot 2100\ t/cm^2} = 0{,}0571\ cm$$

$$\Delta \ell_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} \cdot \ell_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot \ell_{BC}}{A \cdot E} = \frac{0 \cdot 300\ cm}{10\ cm^2 \cdot 2100\ t/cm^2} = 0$$

$$\Delta \ell_{CD} = \frac{\sigma_{CD}}{E} \cdot \ell_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot \ell_{CD}}{A \cdot E} = \frac{-3t \cdot 600\ cm}{10\ cm^2 \cdot 2100\ t/cm^2} = -0{,}0857\ cm$$

καὶ $\Delta \ell_{ολ.} = -0{,}0286\ cm$.

Τὴ συνολικὴ μεταβολὴ μήκους θὰ μπορούσαμε νὰ τὴ βροῦμε χρησιμοποιῶντας τὴ σχέση $\Delta \ell_{ολ.} = \Delta \ell^{F_1}_{ολ.} + \Delta \ell^{F_2}_{ολ} + \Delta \ell^{F_3}_{ολ.}$, ἡ ὁποία δίνει τὴ συνολικὴ μεταβολὴ μήκους, ποὺ προκαλεῖται ἀπὸ τὴν καθεμιὰ δύναμη χωριστά.

$$\Delta \ell^{F_1}_{ολ.} = \varepsilon^{F_1} \cdot \ell^{F_1} = \frac{\sigma^{F_1}}{E} \cdot \ell^{F_1} = \frac{F_1 \cdot \ell^{F_1}}{A \cdot E} = \frac{-3t \cdot 1200\ cm}{10\ cm^2 \cdot 2100\ t/cm^2} = -0{,}171\ cm$$

$$\Delta \ell^{F_2}_{ολ.} = \varepsilon^{F_2} \cdot \ell^{F_2} = \frac{\sigma^{F_2}}{E} \cdot \ell^{F_2} = \frac{F_2 \cdot \ell^{F_2}}{A \cdot E} = \frac{3t \cdot 600\ cm}{10\ cm^2 \cdot 2100\ t/cm^2} = 0{,}0857\ cm$$

$$\Delta \ell^{F_3}_{ολ.} = \varepsilon^{F_3} \cdot \ell^{F_3} = \frac{\sigma^{F_3}}{E} \cdot \ell^{F_3} = \frac{F_3 \cdot \ell^{F_3}}{A \cdot E} = \frac{4t \cdot 300\ cm}{10\ cm^2 \cdot 2100\ t/cm^2} = 0{,}0571\ cm$$

καὶ $\Delta \ell_{ολ.} = -0{,}0286\ cm$.

Ἡ συνολικὴ μεταβολὴ ὄγκου εἶναι $\Delta V_{o\lambda.} = \Delta V_{o\lambda.}^{F_1} + \Delta V_{o\lambda.}^{F_2} + \Delta V_{o\lambda.}^{F_3}$.

$$\Delta V_{o\lambda}^{F_1} = \Theta^{F_1} \cdot V_{AD.} = \left(\varepsilon_1^{F_1} + \varepsilon_2^{F_1} + \varepsilon_3^{F_1}\right) \cdot V_{AD.} \;,$$

$$\varepsilon_1^{F_1} = \frac{\sigma_1^{F_1}}{E} = \frac{F_1}{A \cdot E} = \frac{-3t}{10\,cm^2 \cdot 2100\,t/cm^2} = -0{,}000143 \;,$$

$$\varepsilon_2^{F_1} = \varepsilon_3^{F_1} = -\nu \cdot \varepsilon_1^{F_1} = -0{,}28\,(-0{,}00014) = 0{,}00004 \;, \text{ καί}$$

$$\Delta V_{o\lambda.}^{F_1} = (-0{,}000063) \cdot (10\,cm^2 \cdot 1200\,cm) = -0{,}756\ cm^3 .$$

$$\Delta V_{o\lambda.}^{F_2} = \Theta^{F_2} \cdot V_{AC} = \left(\varepsilon_1^{F_2} + \varepsilon_2^{F_2} + \varepsilon_3^{F_2}\right) \cdot V_{AC} \;,$$

$$\varepsilon_1^{F_2} = \frac{\sigma_1^{F_2}}{E} = \frac{F_2}{A \cdot E} = \frac{3\,t}{10\,cm^2 \cdot 2100\,t/cm^2} = 0{,}000143 \;,$$

$$\varepsilon_2^{F_2} = \varepsilon_3^{F_2} = -\nu \cdot \varepsilon_1^{F_2} = -0{,}28 \cdot 0{,}00014 = -0{,}00004 \;, \text{ καί}$$

$$\Delta V_{o\lambda.}^{F_2} = 0{,}000063 \cdot (10\,cm^2 \cdot 600\,cm) = 0{,}378\ cm^3 .$$

$$\Delta V_{o\lambda.}^{F_3} = \Theta^{F_3} \cdot V_{AB.} = \left(\varepsilon_1^{F_3} + \varepsilon_2^{F_3} + \varepsilon_3^{F_3}\right) \cdot V_{AB} \;,$$

$$\varepsilon_1^{F_3} = \frac{\sigma_1^{F_3}}{E} = \frac{F_3}{A \cdot E} = \frac{4\,t}{10\,cm^2 \cdot 2100\,t/cm^2} = 0{,}00019 \;,$$

$$\varepsilon_2^{F_3} = \varepsilon_3^{F_3} = -\nu \cdot \varepsilon_1^{F_3} = -0{,}28 \cdot 0{,}00019 = -0{,}000053 \;, \text{ καί}$$

$$\Delta V_{o\lambda.}^{F_3} = 0{,}000084 \cdot (10\,cm^2 \cdot 300\,cm) = 0{,}250\ cm^3 .$$

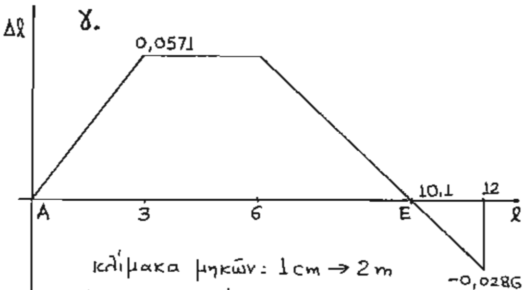
Ἑπομένως : $\Delta V_{o\lambda.} = \Delta V_{o\lambda.}^{F_1} + \Delta V_{o\lambda.}^{F_2} + \Delta V_{o\lambda}^{F_3} = -0{,}128\ cm^3$.

β. Θά πρέπει $\Delta \ell_{o\lambda.}^{F_1} + \Delta \ell_{o\lambda.}^{F_2} + \Delta \ell_{o\lambda.}^{F_3} = 0 \Rightarrow \Delta \ell_{o\lambda}^{F_3} = -\left(\Delta \ell_{o\lambda.}^{F_1} + \Delta \ell_{o\lambda.}^{F_2}\right)$ $= 0{,}0853$, ἑπομένως $\varepsilon^{F_3} \cdot \ell^{F_3} = 0{,}0853 \Rightarrow \frac{\sigma^{F_3}}{E} \cdot \ell^{F_3} = 0{,}0853 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{F_3 \cdot \ell^{F_3}}{A \cdot E} = 0{,}0853 \Rightarrow \frac{4\,t \cdot \ell^{F_3}}{10\,cm^2 \cdot 2100\,t/cm^2} = 0{,}0853 \Rightarrow \ell^{F_3} = 447{,}83\,cm \;,$$

δηλαδή ἡ F_3 πρέπει νά ἐφαρμοστεῖ σέ ἀπόσταση 447,83 cm ἀπό τό A.

γ.

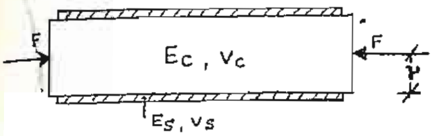


κλίμακα μηκῶν : 1 cm → 2 m

κλίμακα ἐπιμηκύνσεων : 1 cm → 0,03 cm

Ἀπό τό διάγραμμα βρίσκουμε ὅτι μεταβολή μήκους ἴση μέ τό μηδέν ἔχουμε γιά τό σημεῖο E, πού ἀπέχει ἀπό τό A 10,1 m.

ἀσκηση 5



Κυλινδρική ράβδος ἀπό χαλκό διατομῆς A, περιβάλλεται ἀπό λεπτότοιχο χαλύβδινο σωλῆνα πάχους t, ὁ ὁποῖος παρεμποδίζει μερικά τήν ἐγκάρσια διαστολή τῆς ράβδου. Γιά ἀξονική δύναμη F ὁμοιόμορφα κατανεμημένη ζητοῦνται:

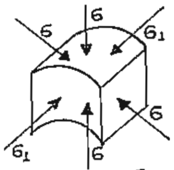
α. Ἡ πίεση μεταξύ σωλῆνα καί ράβδου καθώς καί ἡ διαμήκης καί ἐγκάρσια παραμόρφωση τῆς ράβδου.

β. Νά ἐξεταστοῦν τά ἴδια ἐρωτήματα, ἄν ἀντί τῆς δύναμης F ἔχουμε μεταβολή θερμοκρασίας κατά Δt.

Τριβή μεταξύ σωλῆνα καί ράβδου δέν θά ληφθεῖ ὑπ' ὄψη.

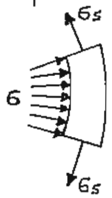
λυση

α. Ἄς εἶναι σ ἡ πίεση μεταξύ σωλῆνα καί ράβδου. Θεωροῦμε γύρω ἀπό τήν ἐπιφάνεια ἐπαφῆς ἕνα στοιχειῶδες τεμάχιο χαλκοῦ καί ἕνα χάλυβα. Τά ἀπομονώνουμε σέ ἐπί μέρους σχήματα καί σχεδιάζουμε τίς δυνάμεις πού ἐπενεργοῦν στό καθένα ἀπ' αὐτά.



Γιά τή χάλκινη ράβδο ἡ ἐγκάρσια παραμόρφωση εἶναι: $\varepsilon_c = \frac{1}{E_c}\cdot\left[-\sigma-\nu_c\cdot(-\sigma_1-\sigma)\right]$,

ὅπου $\sigma_1 = \frac{F}{A}$.



Γιά τόν ἐξωτερικό χαλύβδινο σωλῆνα ἡ ἐντατική κατάσταση εἶναι μονοαξονική, $\varepsilon_s = \frac{1}{E_s}\cdot\sigma_s$.
Μέ βάση τόν τύπο τῆς ἄσκησης 6 σελ. 28 ἔχουμε: $\frac{\sigma}{t} = \frac{\sigma_s}{r} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\sigma\cdot r}{t}$ καί $\varepsilon_s = \frac{\sigma\cdot r}{E_s\cdot t}$.

Ἡ συνθήκη, πού πρέπει νά ἱκανοποιεῖται εἶναι, $\varepsilon_c = \varepsilon_s \Rightarrow$

$$\frac{1}{E_c}\left[-\sigma-\nu_c(-\sigma_1-\sigma)\right] = \frac{\sigma\cdot r}{t\cdot E_s} \Rightarrow \sigma\cdot\left[\frac{r}{t\cdot E_s}-\frac{\nu_c}{E_c}+\frac{1}{E_c}\right] = \frac{\nu_c\cdot\sigma_1}{E_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{t\cdot\sigma_1\cdot\nu_c\cdot E_s}{E_c\cdot r + E_s\cdot t\cdot(1-\nu_c)} \quad (1)$$

Ἡ ἐγκάρσια παραμόρφωση τῆς ράβδου εἶναι $\varepsilon_{c\,\text{ἐγκ.}} = \frac{1}{E_c}\left[-\sigma-\nu_c\cdot(-\sigma_1-\sigma)\right]$ ἐνῶ ἡ διαμήκης εἶναι $\varepsilon_{c\,\text{διαμ.}} = \frac{1}{E_c}\cdot\left[-\sigma_1-\nu_c(-\sigma-\sigma)\right] =$
$= \frac{1}{E_c}\cdot\left[-\sigma_1+2\cdot\nu_c\cdot\sigma\right]$, ὅπου σ ἡ τιμή, πού δίνει ἡ (1).

β. Στήν περίπτωση αὐτή $\sigma_1 = 0$ καί $\varepsilon_c = \varepsilon_c^{\theta} + \varepsilon_c^{\sigma}$, ὅπου ε_c^{θ} ἡ ἐγκάρσια παραμόρφωση λόγω θερμοκρασίας καί ε_c^{σ} ἡ ἐγκάρσια παραμόρφωση λόγω τάσης. Εἶναι $\varepsilon_c^{\theta} = \alpha_c \cdot \Delta t$, ὅπου α_c ὁ συντελεστής θερμικῆς διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ, $\varepsilon_c^{\sigma} = \frac{1}{E_c} \cdot \left[-\sigma - \nu_c(-\sigma)\right] = \frac{1}{E_c} \cdot (\nu_c \cdot \sigma - \sigma)$,

καί ἑπομένως $\varepsilon_c = \alpha_c \cdot \Delta t + \frac{1}{E_c}(\nu_c \cdot \sigma - \sigma)$.

Γιά τό χαλύβδινο σωλῆνα θά ἔχουμε ἀντίστοιχα:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s^{\theta} + \varepsilon_s^{\sigma} = \alpha_s \cdot \Delta t + \frac{1}{E_s} \cdot \sigma_s = \alpha_s \cdot \Delta t + \frac{\sigma \cdot r}{E_s \cdot t}.$$

Πρέπει $\varepsilon_c = \varepsilon_s \Rightarrow \alpha_c \cdot \Delta t + \frac{1}{E_c}(\nu_c \sigma - \sigma) = \alpha_s \cdot \Delta t + \frac{\sigma \cdot r}{E_s \cdot t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{(\alpha_c - \alpha_s) \cdot \Delta t}{\frac{r}{t \cdot E_s} + \frac{1 - \nu_c}{E_c}} \quad (2).$$

Ἡ ἐγκάρσια παραμόρφωση τῆς ράβδου εἶναι:

$\varepsilon_{c\,\text{ἐγκ.}} = \alpha_c \cdot \Delta t + \frac{1}{E_c}(\nu_c \cdot \sigma - \sigma)$, ἐνῶ ἡ διαμήκης:

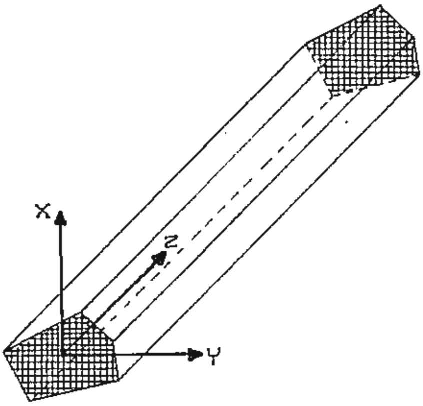
$$\varepsilon_{c\,\text{διαμ.}} = \varepsilon^{\theta}_{c\,\text{διαμ.}} + \varepsilon^{\sigma}_{c\,\text{διαμ.}} = \alpha_c \cdot \Delta t + \frac{1}{E_c}\left[-\nu_c(-\sigma - \sigma)\right] =$$

$$= \alpha_c \cdot \Delta t + \frac{2 \cdot \nu_c \cdot \sigma}{E_c}$$, ὅπου σ ἡ τιμή πού δίνει ἡ (2).

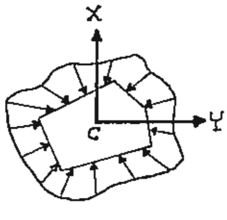
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΠΙΠΕΔΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ – ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ



Θεωροῦμε ἕνα πρισματικό σῶμα μέ αὐθαίρετη διατομή, τοῦ ὁποίου τό μῆκος εἶναι πολύ μεγαλύτερο ἀπό τίς διαστάσεις τῆς διατομῆς καί τό ὁποῖο στηρίζεται κατά τά δύο ἄκρα του σέ δύο ἀνένδοτα στηρίγματα. Θεωροῦμε ἐπίσης ὅτι τό πρισματικό αὐτό σῶμα φορτίζεται μέ δυνάμεις κάθετες πρός τόν ἄξονά του, ὁμοιόμορφα διανεμημένες κατά μῆκος τοῦ πρίσματος, καί ὅτι οἱ μαζικές δυνάμεις εἶναι μηδενικές. Ἔχουμε τότε νά ἀντιμετωπίσουμε ἕνα πρόβλημα ἐπίπεδης παραμόρφωσης.



Ἄν ἡ ἀξονική διάσταση τοῦ προηγούμενου σώματος εἶναι πολύ μικρή, τό σῶμα παίρνει τή μορφή δίσκου καί ἔχουμε τότε νά ἀντιμετωπίσουμε ἕνα πρόβλημα ἐπίπεδης ἐντατικῆς κατάστασης (τήν ὁποία γιά λόγους ἁπλότητας θά ὀνομάζουμε καί ἐπίπεδη ἔνταση).

Ἡ μελέτη καί τῶν δύο παραπάνω προβλημάτων ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα ὅτι οἱ ἄγνωστες τάσεις σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} θά προκύψουν ἀπό τίς ἑξῆς τρεῖς ἐξισώσεις:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \ (1), \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \ (2), \quad \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \ (3).$$

ὅπου ∇^2 ὁ τελεστής τοῦ Laplace καί $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Βέβαια οἱ σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} πρέπει νά ἱκανοποιοῦν καί τίς συνοριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος (συνοριακές συνθῆκες εἶναι οἱ συνθῆκες, πού πρέπει νά ἰσχύουν στά σύνορα τοῦ προβλήματος, πρβλ. ἄσκηση 4 σελ. 43)

Εἰσάγοντας τώρα μιά συνάρτηση Φ τέτοια ὥστε:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial y} \qquad (4)$$

οἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) ἱκανοποιοῦνται ἀπό ταυτότητα, ἐνῶ ἡ ἐξίσωση (3) δίνει:

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\cdot\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \ (5).$$

Χρησιμοποιώντας τό σύμβολο $\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2 = \dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\cdot\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$ ἡ (5) γράφεται $\nabla^4 \Phi = 0$ (6).

Ἔτσι ἔχουμε ἀναγάγει τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) σέ μιά μόνο ἐξίσωση, τήν (6).

Ἄν γιά ἕνα συγκεκριμένο πρόβλημα βροῦμε μιά συνάρτηση ϕ τέτοια ὥστε νά ἐπαληθεύεται ἡ (6) καί οἱ τιμές τῶν τάσεων, πού δίνουν οἱ (4), νά ἱκανοποιοῦν τίς συνοριακές συνθῆκες, τότε ἡ ϕ εἶναι ἡ τασική συνάρτηση, πού λύνει τό πρόβλημα αὐτό.

Τά προβλήματα τῆς ὁμάδας αὐτῆς μποροῦμε νά τά χωρίσουμε στίς ἑξῆς δύο κατηγορίες:

1) Δίνεται μιά συνάρτηση ϕ καί ζητεῖται νά ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι τασική συνάρτηση ἑνός προβλήματος. Ἀκολουθοῦμε τήν ἑξῆς πορεία:

α) Ἀποδεικνύουμε ὅτι $\nabla^4\phi = 0$.

β) Βρίσκουμε τίς τάσεις $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$. Εἶναι:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \cdot \partial y}$$

γ) Ἐξετάζουμε ἄν ἱκανοποιοῦνται οἱ συνοριακές συνθῆκες.

Γιά νά εἶναι ἡ ϕ τασική συνάρτηση πρέπει νά ἱκανοποιοῦνται ὅλες οἱ παραπάνω προϋποθέσεις.

2) Δίνονται οἱ $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ καί ζητεῖται νά διερευνήσουμε ἄν ἀποτελοῦν λύση ἑνός δοσμένου προβλήματος. Ἀκολουθοῦμε τήν ἑξῆς πορεία:

α) Ἀποδεικνύουμε ὅτι $\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$.

β) Ἐπαληθεύουμε τίς συνθῆκες ἰσορροπίας:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

γ) Ἐξετάζουμε ἄν ἱκανοποιοῦνται οἱ συνοριακές συνθῆκες.

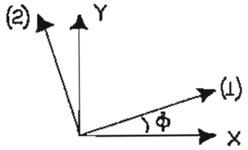
Καί στίς δύο παραπάνω κατηγορίες προβλημάτων θά πρέπει σέ σώματα ἀπείρων διαστάσεων νά μηδενίζονται οἱ τάσεις στό ἄπειρο.

ασκηση 1

Νά ἀποδειχτεῖ στίς περιπτώσεις ἐπίπεδης παραμόρφωσης καί ἐπίπεδης ἔντασης ὅτι γιά ἰσότροπο ὑλικό οἱ κύριες κατευθύνσεις τῶν τανυστῶν τάσης καί παραμόρφωσης συμπίπτουν.

λυση

Ἔστω ὅτι γιά νά πάρουμε τό κύριο σύστημα τῆς τάσης στρέφουμε τό σύστημα συντεταγμένων κατά γωνία ϕ, ἐνῶ γιά νά πάρουμε τό κύριο σύστημα παραμόρφωσης στρέφουμε τό σύστημα συντεταγμένων κατά γωνία ϕ'.



Οἱ γωνίες ϕ καί ϕ' δίνονται ἀπό τίς σχέσεις :

$$\tan 2\phi = \frac{2\cdot\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \quad (1)$$

$$\tan 2\phi' = \frac{2\cdot\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}} = \frac{\dfrac{2\cdot\sigma_{xy}}{2\cdot G}}{\dfrac{(1+v)}{E}\cdot(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})} = \frac{2\cdot\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \quad (2)$$

διότι ἡ διαφορά $(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})$ στήν ἐπίπεδη ἔνταση εἶναι :

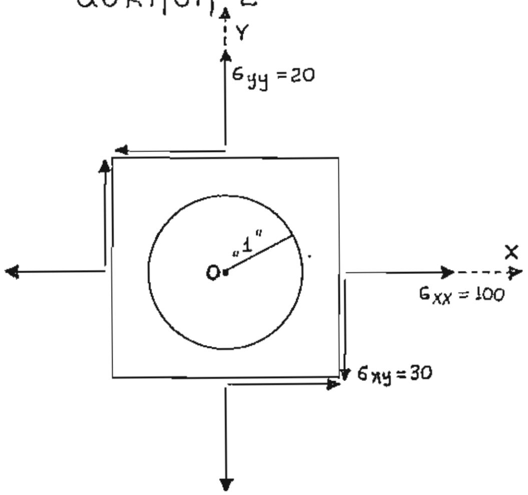
$$\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_{xx}-v\cdot\sigma_{yy}) - \frac{1}{E}\cdot(\sigma_{yy}-v\cdot\sigma_{xx}) = \frac{(1+v)(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})}{E}$$

ἐνῶ στήν ἐπίπεδη παραμόρφωση :

$$\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy} = \frac{1+v}{E}\cdot\left[(1-v)\cdot\sigma_{xx}-v\cdot\sigma_{yy}\right] - \frac{1+v}{E}\cdot\left[(1-v)\cdot\sigma_{yy}-v\cdot\sigma_{xx}\right] = \frac{(1+v)(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})}{E}$$

καί $G = \dfrac{E}{2(1+v)}$. Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει $\phi=\phi'$, δηλαδή τό κύριο σύστημα τῆς τάσης συμπίπτει μέ τό κύριο σύστημα τῆς παραμόρφωσης.

ασκηση 2



Στήν ἐπίπεδη ἐντατική κατάσταση τοῦ σχήματος μελετοῦμε τήν παραμόρφωση κύκλου ἀκτίνας ἴσης μέ τή "μονάδα". Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι μετά τήν παραμόρφωση ὁ κύκλος παίρνει σχῆμα ἔλλειψης.

Οἱ τάσεις δίνονται σέ Kp/cm^2.

Οἱ διαστάσεις τοῦ σχήματος θεωροῦνται ἀπειροστές.

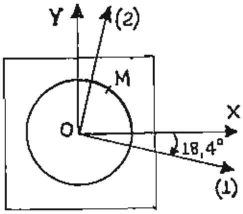
Λυση

Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη άσκηση τό κύριο σύστημα τής τάσης συμπίπτει μέ τό κύριο σύστημα τής παραμόρφωσης. Τό σύστημα αυτό άντιστοιχεί σέ γωνία στροφής ϕ, πού δίνεται άπό τή σχέση $\tan 2\phi = \dfrac{2\cdot 6_{xy}}{6_{xx}-6_{yy}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan 2\phi = \dfrac{2\cdot(-30)}{100-20} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \phi = -18,4^{o}$.

Οί κύριες τάσεις είναι $6_{1,2} = \dfrac{6_{xx}+6_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{6_{xx}-6_{yy}}{2}\right)^2 + 6_{xy}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6_{1,2} = \dfrac{100+20}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{100-20}{2}\right)^2 + (-30)^2} \Rightarrow 6_1 = 110 \ kp/cm^2 \ , \ 6_2 = 10 \ kp/cm^2$



Οί κύριες παραμορφώσεις είναι :

$$\varepsilon_1 = \frac{6_1 - v\cdot 6_2}{E} = \frac{110-10\cdot v}{E}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{6_2 - v\cdot 6_1}{E} = \frac{10-110\cdot v}{E} .$$

Θά μελετήσουμε τήν έντατική κατάσταση τοῦ κύκλου στό κύριο σύστημα. Στό σύστημα αυτό θά έχουμε μόνο όρθές παραμορφώσεις καί καθόλου διατμητικές.

Θεωροῦμε τίς άκτίνες τοῦ κύκλου κατά μῆκος τῶν άξόνων (1) καί (2). Μετά τήν παραμόρφωση ή άκτίνα κατά μῆκος τοῦ άξονα (1) θά γίνει : $\alpha = 1 + \dfrac{110-10\cdot v}{E}\cdot 1$, ένῶ ή άκτίνα κατά μῆκος τοῦ άξονα (2) θά γίνει : $\beta = 1 + \dfrac{10-110\cdot v}{E}\cdot 1$.

Θεωροῦμε καί ένα σημείο τοῦ κύκλου, Μ, μέ συντεταγμένες x_1 καί x_2 ώς πρός τό σύστημα συντεταγμένων (1),(2). Μετά τήν παραμόρφωση τό σημείο Μ άποκτᾶ μιά νέα θέση Μ', πού έχει συντεταγμένες* :

$$x_1' = x_1 + \frac{110-10\cdot v}{E}\cdot x_1 \quad , \quad x_2' = x_2 + \frac{10-110\cdot v}{E}\cdot x_2 .$$

Έξετάζουμε τήν ποσότητα : $\left(\dfrac{x_1'}{\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2'}{\beta}\right)^2$. Είναι :

$$\left(\frac{x_1'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{x_2'}{\beta}\right)^2 = \left[\frac{x_1\cdot\left(1+\frac{110-10\cdot v}{E}\right)}{1+\frac{110-10\cdot v}{E}}\right]^2 + \left[\frac{x_2\cdot\left(1+\frac{10-110\cdot v}{E}\right)}{1+\frac{10-110\cdot v}{E}}\right]^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Έπομένως μετά τήν παραμόρφωση ό κύκλος γίνεται έλλειψη μέ ήμιάξονες $\alpha = 1 + \dfrac{110-10\cdot v}{E}$ καί $\beta = 1 + \dfrac{10-110\cdot v}{E}$.

---

* Δέν έχουμε μεταβολή τῶν τανυστῶν τάσης καί παραμόρφωσης γιά τό σημείο Μ, λόγω τῶν άπειροστῶν άποστάσεων.

ασκηση 3

Νά ἐξεταστεῖ ἄν ἡ ἀκόλουθη διανομή τάσεων μπορεῖ νά εἶναι λύση ἑνός προβλήματος ἐλαστικότητας.

$$\sigma_{xx} = c\cdot\left[y^2 + \nu\cdot(x^2-y^2)\right] \qquad \sigma_{xy} = -2\cdot\nu\cdot c\cdot x\cdot y$$

$$\sigma_{yy} = c\cdot\left[x^2 + \nu\cdot(y^2-x^2)\right] \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \nu\cdot c\cdot(x^2+y^2)$$

ὅπου ν ὁ λόγος τοῦ Poisson καί $c\neq 0$ μία σταθερά.

λυση

Ἐξετάζουμε πρῶτα ἄν ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη $\nabla^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=0$.

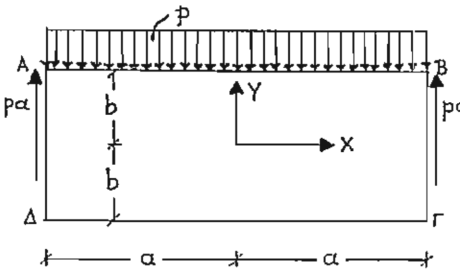
Εἶναι: $\nabla^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) = \nabla^2(cy^2+cx^2) = \dfrac{\partial^2(cy^2+cx^2)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2(cy^2+cx^2)}{\partial y^2} =$

$$= \frac{\partial^2(cy^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(cx^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(cy^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(cx^2)}{\partial y^2} = 0 + 2\cdot c + 2\cdot c + 0 = 4\cdot c$$, ὁπότε

γιά νά εἶναι $\nabla^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=0$ θά πρέπει $c=0$, τό ὁποῖο ὅμως εἶναι ἀντίθετο πρός τίς ὑποθέσεις τοῦ προβλήματος.

Ἡ διανομή τάσεων, λοιπόν, πού δόθηκε, δέν μπορεῖ νά εἶναι λύση ἑνός προβλήματος ἐλαστικότητας.

ασκηση 4



Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ τασική συνάρτηση

$$\phi = \frac{p}{8b^3}\left[x^2(y^3-3yb^2-2b^3) - \frac{1}{5}y^3(y^2-2b^2+5a^2)\right]$$

δίνει τή λύση τοῦ προβλήματος τοῦ δίσκου τοῦ σχήματος γιά τή φόρτιση p.

λυση

α) Θά πρέπει $\nabla^4\phi = \dfrac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4\phi}{\partial y^4} + 2\cdot\dfrac{\partial^4\phi}{\partial x^2\cdot\partial y^2} = 0$.

Οἱ μόνοι ὅροι, πού θά περισωθοῦν μετά τίς παραγωγίσεις, εἶναι ἡ μερική παράγωγος τοῦ y^5 ὡς πρός y^4 καί ἡ μερική παράγωγος τοῦ $x^2 y^3$ ὡς πρός x^2 καί y^2. Εἶναι $\dfrac{\partial^4 (y^5)}{\partial y^4} = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot y$, $\dfrac{\partial^4 (x^2 y^3)}{\partial x^2 . \partial y^2} = 2\cdot 3\cdot 2\cdot y$, ἑπομένως

$$\nabla^4 \phi = \frac{p}{8\cdot b^3}\cdot\left(2\cdot 12\cdot y - \frac{1}{5}\cdot 120\cdot y\right) = 0$$

β) $$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{p}{4\cdot b^3}\cdot\left(3\cdot x^2 y - 2\cdot y^3 + \frac{6}{5}\cdot y\cdot b^2 - 3\cdot a^2 y\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{p}{4\cdot b^3}\cdot\left(y^3 - 3\cdot y\cdot b^2 - 2\cdot b^3\right) \qquad (1)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\cdot\partial y} = \frac{p}{4\cdot b^3}\cdot\left(3\cdot b^2\cdot x - 3\cdot x\cdot y^2\right) = \frac{3\cdot p\cdot x}{4\cdot b^3}\cdot\left(b^2 - y^2\right)$$

γ) ἐξετάζουμε ἄν ἱκανοποιοῦνται οἱ συνοριακές συνθῆκες.

Σύνορο ΔΓ. Ἡ ἐξίσωσή του εἶναι: $y = -b$.
Ἐπειδή ἡ ἐξωτερική ἐπιφάνεια τοῦ συνόρου αὐτοῦ εἶναι ἀφόρτιστη, θά πρέπει $\sigma_{yy} = 0$ καί $\sigma_{xy} = 0$, ἐνῶ ἡ σ_{xx} μπορεῖ νά ἔχει ὁποιαδήποτε τιμή. Θέτοντας στίς (1) $y = -b$ βρίσκουμε:

$$\sigma_{yy} = \frac{p}{4\cdot b^3}\cdot\left[(-b)^3 - 3\cdot(-b)\cdot b^2 - 2\cdot b^3\right] = 0 \quad , \quad \sigma_{xy} = \frac{3\cdot p\cdot x}{4\cdot b^3}\cdot\left(b^2 - b^2\right) = 0 .$$

Σύνορο ΑΒ. Ἡ ἐξίσωσή του εἶναι: $y = b$. Θά πρέπει νά ἔχουμε: $\sigma_{yy} = -p$, $\sigma_{xy} = 0$, ἐνῶ ἡ σ_{xx} μπορεῖ νά ἔχει ὁποιαδήποτε τιμή. Θέτοντας $y = b$ στίς (1) βρίσκουμε:

$$\sigma_{yy} = \frac{p}{4\cdot b^3}\cdot\left(b^3 - 3\cdot b\cdot b^2 - 2\cdot b^3\right) = -p \quad , \quad \sigma_{xy} = \frac{3\cdot p\cdot x}{4\cdot b^3}\cdot\left(b^2 - b^2\right) = 0 .$$

Σύνορο ΑΔ. Ἡ ἐξίσωσή του εἶναι: $x = -a$. Θά πρέπει ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν σ_{xy} νά ἰσοῦται μέ $p\cdot a$, $\sigma_{xx} = 0$, γιατί δέν ὑπάρχει ἐξωτερική φόρτιση κατά τήν διεύθυνση Χ, ἐνῶ ἡ σ_{yy} μπορεῖ νά ἔχει ὁποιαδήποτε τιμή. Θέτοντας στίς (1) $x = -a$ βρίσκουμε:

$$\sigma_{xy} = \frac{-3\cdot p\cdot a}{4\cdot b^3}\cdot\left(b^2 - y^2\right) \quad , \quad \sigma_{xx} = \frac{p}{4\cdot b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot y\cdot b^2 - 2\cdot y^3\right) = \frac{p}{2}\cdot\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^3\right]$$

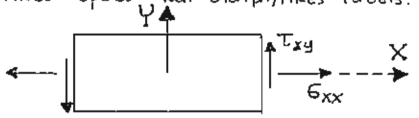
Ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν σ_{xy} στό σύνορο ΑΔ εἶναι:

$$\int_{-b}^{b} \sigma_{xy}\cdot dy = \int_{-b}^{b} \frac{-3\cdot p\cdot a}{4\cdot b^3}\cdot\left(b^2 - y^2\right)\cdot dy = \left[-\frac{3\cdot p\cdot a\cdot b^2\cdot y}{4\cdot b^3} + \frac{3\cdot p\cdot a\cdot y^3}{4\cdot b^3\cdot 3}\right]_{-b}^{b} =$$

$$= -\frac{3\cdot p\cdot a\cdot b^3}{4\cdot b^3} + \frac{3\cdot p\cdot a\cdot b^3}{12\cdot b^3} - \frac{3\cdot p\cdot a\cdot b^3}{4\cdot b^3} + \frac{3\cdot p\cdot a\cdot b^3}{12\cdot b^3} = -p\cdot a .$$

Τό πρόσημο τῆς συνισταμένης δύναμης τῶν σ_{xy} εἶναι σύμφωνο μέ τή σύμβαση, πού ἔχουμε κάνει γιά τίς θετικές ὀρθές καί διατμητικές τάσεις (πρβλ. σελ. 20). Ὑπενθυμίζουμε τή σύμβαση αὐτή στό σχῆμα, πού ἀκολουθεῖ.

θετικές ὀρθές καί διατμητικές τάσεις.



Σύμφωνα, λοιπόν, μέ τή σύμβαση αὐτή ἡ προσημασμένη τιμή τῆς δύναμης p.α γιά τό σύνορο ΑΔ εἶναι $-p.\alpha$.

Παρατηροῦμε ὅτι γιά τό σύνορο ΑΔ οἱ συνοριακές συνθῆκες ἀπαιτοῦν $\sigma_{xx}=0$, ἐνῶ ἡ τασική συνάρτηση δίνει τιμή γιά τή $\sigma_{xx}=\frac{p}{2}\cdot\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{y}{b}-\left(\frac{y}{b}\right)^3\right]$. Ἐν τούτοις γιά τό σύνορο ΑΔ οἱ δύο ἐντατικές καταστάσεις, ἡ πρώτη μέ $\sigma_{xx}=0$, ἡ δεύτερη μέ $\sigma_{xx}=\frac{p}{2}\cdot\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{y}{b}-\left(\frac{y}{b}\right)^3\right]$ μποροῦν νά εἶναι ἰσοδύναμες, ἀρκεῖ οἱ σ_{xx} τῆς δεύτερης ἐντατικῆς κατάστασης νά ἔχουν στό τμῆμα ΑΔ συνισταμένη δύναμη καί συνισταμένη ροπή ἴσες μέ τό μηδέν. Διότι σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τοῦ Saint-Venant σέ περιοχές τοῦ σώματος ἀπομακρυσμένες ἀπό τά σημεῖα δράσης τῶν δυνάμεων (δηλαδή ἀπό τό σύνορο ΑΔ) ἡ ἐπίδραση τῶν δύο διανομῶν (τῆς πρώτης μέ $\sigma_{xx}=0$, τῆς δεύτερης μέ $\sigma_{xx}\neq 0$) εἶναι ἡ ἴδια, ἀρκεῖ ἡ δεύτερη διανομή νά ἔχει στό σύνορο ΑΔ συνισταμένη δύναμη καί συνισταμένη ροπή ἴσες μέ τό μηδέν (ὁπότε οἱ δύο διανομές εἶναι στατικά ἰσοδύναμες).

Ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν σ_{xx} στό σύνορο ΑΔ εἶναι:

$$\int_{-b}^{b}\sigma_{xx}\cdot dy=\int_{-b}^{b}\frac{p}{2\cdot b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot y\cdot b^2-y^3\right)\cdot dy=\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p\cdot b^2\cdot y^2}{b^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{p\cdot y^4}{b^3}\right]_{-b}^{b}=$$

$$=\frac{3}{20}\cdot\frac{p\cdot b^2\cdot b^2}{b^3}-\frac{1}{8}\cdot\frac{p\cdot b^4}{b^3}-\frac{3}{20}\cdot\frac{p\cdot b^2\cdot b^2}{b^3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{p\cdot b^4}{b^3}=0$$

, ἐνῶ ἡ συνισταμένη ροπή τῶν σ_{xx} στό σύνορο ΑΔ εἶναι:

$$\int_{-b}^{b}\sigma_{xx}\cdot y\cdot dy=\int_{-b}^{b}\frac{p}{2b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot y\cdot b^2-y^3\right)\cdot y\cdot dy=\int_{-b}^{b}\frac{p}{2b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot y^2\cdot b^2-y^4\right)\cdot dy=$$

$$=\left[\frac{p}{2b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot y^3\cdot b^2-\frac{y^5}{5}\right)\right]_{-b}^{b}=\frac{p}{2b^3}\cdot\left(\frac{b^5}{5}-\frac{b^5}{5}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^5}{5}\right)=0 .$$

Σύνορο ΒΓ. Ἡ ἐξίσωσή του εἶναι: $x=\alpha$. Θά πρέπει ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν σ_{xy} νά ἰσοῦται μέ $p\cdot\alpha$, $\sigma_{xx}=0$, ἐνῶ ἡ σ_{yy} μπορεῖ νά ἔχει ὁποιαδήποτε τιμή. Θέτοντας στίς (1) $x=\alpha$ βρίσκουμε:

$$\sigma_{xy}=\frac{3\cdot p\cdot\alpha}{4\cdot b^3}\cdot(b^2-y^2)\quad,\quad\sigma_{xx}=\frac{p}{4\cdot b^3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot y\cdot b^2-2\cdot y^3\right)=\frac{p}{2}\cdot\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{y}{b}-\left(\frac{y}{b}\right)^3\right].$$

Ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν σ_{xy} στό σύνορο ΒΓ εἶναι:

$$\int_{-b}^{b}\sigma_{xy}\cdot dy=\int_{-b}^{b}\frac{3\cdot p\cdot\alpha}{4\cdot b^3}\cdot(b^2-y^2)\cdot dy=\left[\frac{3\cdot p\cdot\alpha\cdot b^2\cdot y}{4\cdot b^3}-\frac{3\cdot p\cdot\alpha\cdot y^3}{4\cdot b^3\cdot 3}\right]_{-b}^{b}=$$

$$=\frac{3\cdot p\cdot\alpha\cdot b^3}{4\cdot b^3}-\frac{3\cdot p\cdot\alpha\cdot b^3}{12b^3}+\frac{3\cdot p\cdot\alpha\cdot b^3}{4\cdot b^3}-\frac{3\cdot p\cdot\alpha\cdot b^3}{12\cdot b^3}=p\cdot\alpha .$$

Σύμφωνα βέβαια μέ τή σύμβαση, πού κάναμε γιά τίς θετικές διατμητικές τάσεις, στό σύνορο ΒΓ ἡ $p.\alpha$ θά ἔχει πρόσημο θετικό.

Οἱ συνοριακές συνθῆκες ἀπαιτοῦν $\sigma_{xx}=0$, ἐνῶ ἡ τασική συνάρτηση δίνει τιμή γιά τήν $\sigma_{xx} = \frac{p}{2}\cdot\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{y}{b}-\left(\frac{y}{b}\right)^3\right]$. Γιά νά εἶναι, λοιπόν, οἱ δύο διανομές, ἡ πρώτη μέ $\sigma_{xx}=0$, ἡ δεύτερη μέ $\sigma_{xx}=\frac{p}{2}\cdot\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{y}{b}-\left(\frac{y}{b}\right)^3\right]$, στατικά ἰσοδύναμες, θά πρέπει ἡ δεύτερη διανομή νά ἔχει στό σύνορο ΒΓ συνισταμένη δύναμη καί συνισταμένη ροπή ἴσες μέ τό μηδέν.

Ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν σ_{xx} στό σύνορο ΒΓ εἶναι:

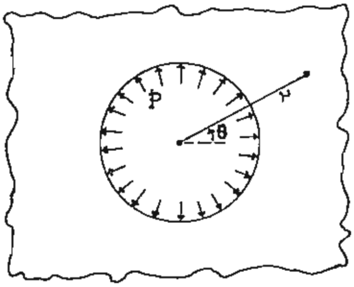
$$\int_{-b}^{b}\sigma_{xx}\cdot dy=\int_{-b}^{b}\frac{p}{2\cdot b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot y\cdot b^2-y^3\right)\cdot dy=\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p\cdot b^2\cdot y^2}{b^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{p\cdot y^4}{b^3}\right]_{-b}^{b}=0$$

ἐνῶ ἡ συνισταμένη ροπή τῶν σ_{xx} στό σύνορο ΒΓ εἶναι:

$$\int_{-b}^{b}\sigma_{xx}\cdot y\cdot dy=\int_{-b}^{b}\frac{p}{2\cdot b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot y\cdot b^2-y^3\right)\cdot y\cdot dy=\int_{-b}^{b}\frac{p}{2b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot y^2\cdot b^2-y^4\right)\cdot dy =$$

$$=\left[\frac{p}{2b^3}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot y^3\cdot b^2-\frac{y^5}{5}\right)\right]_{-b}^{b}=\frac{p}{2\cdot b^3}\cdot\left(\frac{b^5}{5}-\frac{b^5}{5}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^5}{5}\right)=0.$$

ασκηση 5



Ἄπειρος δίσκος μέ ἐσωτερική ὀπή ἀκτίνας α δέχεται ὁμοιόμορφη πίεση p περιμετρικά τῆς ὀπῆς. Ζητεῖται νά βρεθεῖ ἡ ἐντατική κατάσταση τοῦ δίσκου.

λυση

Θά λύσουμε τό πρόβλημα χρησιμοποιώντας τήν τασική συνάρτηση τοῦ Mitchel:

$$\phi(r,\theta)=a_0\cdot \ln r+b_0\cdot r^2+c_0\cdot\theta+(d_0\cdot\ln r+l_0\cdot\theta)\cdot r^2+(f_0\cdot\ln r+g_0\cdot\theta)\cdot r\cos\theta+$$
$$+(h_0\cdot\ln r+j_0\cdot\theta)\cdot r\cdot\sin\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot r^n+b_n\cdot r^{n+2}+c_n\cdot r^{-n}+d_n\cdot r^{-n+2}\right)\cdot\cos n\theta+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(e_n\cdot r^n+f_n\cdot r^{n+2}+g^n\cdot r^{-n}+h_n\cdot r^{-n+2}\right)\cdot\sin n\theta. \qquad (1)$$

Ἡ τασική αὐτή συνάρτηση ἱκανοποιεῖ τή διαρμονική ἐξίσωση $\nabla^4\phi=0$, ὅπου ἡ ἔκφραση τοῦ $\nabla^4\phi$ σέ πολικές συντεταγμένες εἶναι:

$$\nabla^4\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right)$$

Πολλά προβλήματα μποροῦν νά λυθοῦν χρησιμοποιώντας σάν τασική συνάρτηση ὁρισμένους ἀπό τούς ὅρους τῆς (1), τούς ὁποίους διαλέγουμε ἀνάλογα μέ τή φύση τοῦ προβλήματος. Τίς τιμές τῶν σταθερῶν τίς ὑπολογίζουμε ἀπό τίς συνοριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος.

Ἔτσι, ἐπειδή στό πρόβλημά μας ὑπάρχει κυκλική συμμετρία, στήν τασική συνάρτηση τοῦ Mitchel δέν θά ἐμφανίζονται παράγοντες, πού περιέχουν τό θ ἤ συναρτήσεις τοῦ θ, ἀλλά θά ὑπάρχουν μόνο ὅροι ἀνάλογοι πρός τό r. Μποροῦμε, ἑπομένως, νά πάρουμε γιά τασική συνάρτηση τήν $\Phi = \Phi(r) = a_0 \cdot \ln r + b_0 \cdot r^2 + d_0 \cdot r^2 \cdot \ln r$.

Οἱ πολικές συνιστῶσες τῆς τάσης εἶναι :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{a_0}{r^2} + 2 \cdot b_0 + d_0 \cdot (1 + 2 \cdot \ln r)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -\frac{a_0}{r^2} + 2 \cdot b_0 + d_0 \cdot (3 + 2 \cdot \ln r) \qquad (2)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \cdot \partial r} = 0$$

Θά βροῦμε τίς τιμές τῶν σταθερῶν a_0, b_0, d_0 ἀπό τίς συνοριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος. Ἐπειδή ὁ δίσκος εἶναι ἄπειρος, θά πρέπει οἱ τάσεις νά μηδενίζονται στό ἄπειρο. Θέτοντας $r = \infty$ στίς σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ βρίσκουμε ὅτι θά πρέπει $2 \cdot b_0 + d_0 \cdot \infty = 0 \Rightarrow b_0 = 0$, $d_0 = 0$. Ἐπίσης θά πρέπει στά χείλη τῆς ὀπῆς, δηλαδή γιά $r = a$, νά ἔχουμε $\sigma_{rr} = -p$, ἑπομένως $\frac{a_0}{a^2} = -p \Rightarrow a_0 = -p \cdot a^2$

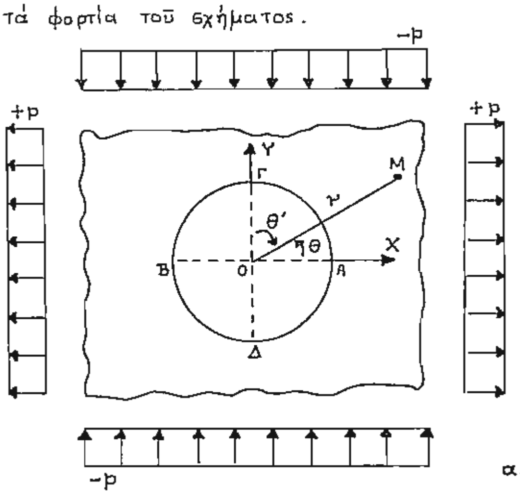
Θέτοντας στίς (2) τίς τιμές τῶν σταθερῶν a_0, b_0, d_0 βρίσκουμε :

$$\sigma_{rr} = -p \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 , \quad \sigma_{\theta\theta} = p \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 , \quad \sigma_{r\theta} = 0 \qquad (3)$$

Ἡ ἐντατική κατάσταση, λοιπόν, πού δόθηκε, ἐκφράζεται ἀπό τίς τιμές τῶν τάσεων, πού δίνουν οἱ σχέσεις (3).

ασκηση 6

Ἐλαστικός δίσκος ἀπείρων διαστάσεων μέ κυκλική ὀπή ἀκτίνας a δέχεται τά φορτία τοῦ σχήματος.



α. Νά βρεθοῦν οἱ ἐκφράσεις σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ σέ τυχαία θέση (r, θ) καί οἱ ἀκραῖες τιμές τους γύρω ἀπό τό περίγραμμα τῆς ὀπῆς.

β. Γιά σημεῖο P μέ συντεταγμένες $r = 2a$, $\theta = 45°$ νά σχεδιάσετε ἀπειροστό ὀρθογώνιο στοιχεῖο μέ προσανατολισμό (X, Y) καί τίς τάσεις, πού τό καταπονοῦν.

λυση

α. Θά βροῦμε ξεχωριστά τίς τάσεις, πού ὀφείλονται στή φόρτιση $+p$ καί στή φόρτιση $-p$, καί μετά θά πάρουμε τήν ἐπαλληλία τους.

Ἀπό τή λύση τοῦ προβλήματος συγκέντρωσης τάσης βρίσκουμε ὅτι οἱ τάσεις, πού προκαλεῖ ἡ φόρτιση $+p$ σ' ἕνα σημεῖο $M(r, \theta)$, εἶναι :

$$\sigma'_{rr} = \frac{p}{2}\cdot\left[\left(1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)+\left(1-\frac{4\cdot\alpha^2}{r^2}+\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma'_{\theta\theta} = \frac{p}{2}\cdot\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{r^2}\right)-\left(1+\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\cos 2\theta\right] \qquad (1)$$

$$\sigma'_{r\theta} = -\frac{p}{2}\cdot\left(1+\frac{2\cdot\alpha^2}{r^2}-\frac{3\cdot\alpha^4}{\alpha^4}\right)\cdot\sin 2\theta$$

Οἱ τάσεις, πού προκαλεῖ ἡ φόρτιση $-p$, προκύπτουν ἀπό τίς (1), ἄν ἀντικαταστήσουμε τό p μέ τό $-p$ καί τό θ μέ τό θ'. Ἡ σχέση μεταξύ τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν θ καί θ' προκύπτει ὡς ἑξῆς:

$$X\hat{O}M + M\hat{O}Y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta-\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta' = -\frac{\pi}{2}+\theta$$

Οἱ τάσεις, ἑπομένως, πού προκαλεῖ ἡ φόρτιση $-p$ εἶναι:

$$\sigma''_{rr} = -\frac{p}{2}\cdot\left[\left(1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)+\left(1-\frac{4\cdot\alpha^2}{r^2}+\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\cos 2\theta'\right]$$

$$\sigma''_{\theta\theta} = -\frac{p}{2}\cdot\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{r^2}\right)-\left(1+\frac{3\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\cos 2\theta'\right]$$

$$\sigma''_{r\theta} = \frac{p}{2}\cdot\left(1+\frac{2\cdot\alpha^2}{r^2}-\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\sin 2\theta'$$

καί δεδομένου ὅτι $\cos 2\theta' = -\cos 2\theta$, $\sin 2\theta' = -\sin 2\theta$, ἔχουμε:

$$\sigma''_{rr} = -\frac{p}{2}\cdot\left[\left(1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)-\left(1-\frac{4\cdot\alpha^2}{r^2}+\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma''_{\theta\theta} = -\frac{p}{2}\cdot\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{r^2}\right)+\left(1+\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\cos 2\theta\right] \qquad (2)$$

$$\sigma''_{r\theta} = -\frac{p}{2}\cdot\left(1+\frac{2\cdot\alpha^2}{r^2}-\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\sin 2\theta$$

Παίρνοντας τήν ἐπαλληλία τῶν (1) καί (2) ἔχουμε:

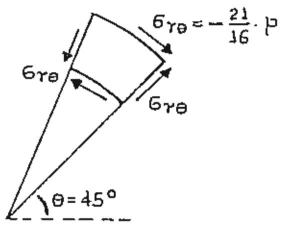
$$\sigma_{rr} = \sigma'_{rr}+\sigma''_{rr} = p\cdot\left(1-\frac{4\cdot\alpha^2}{r^2}+\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma'_{\theta\theta}+\sigma''_{\theta\theta} = -p\cdot\left(1+\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\cos 2\theta \qquad (3)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma'_{r\theta}+\sigma''_{r\theta} = -p\cdot\left(1+\frac{2\cdot\alpha^2}{r^2}-\frac{3\cdot\alpha^4}{r^4}\right)\cdot\sin 2\theta$$

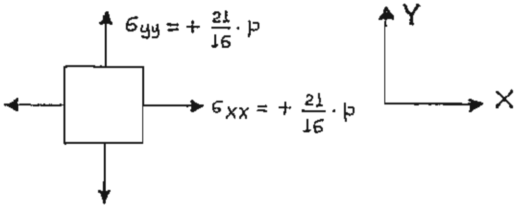
Γιά τό περίγραμμα τῆς ὀπῆς ἔχουμε ὅτι $r = \alpha$, ἑπομένως $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$, ἐνῶ $\sigma_{\theta\theta} = -4\cdot p\cdot\cos 2\theta$. Γιά τά σημεῖα Α καί Β ὅπου $\theta = 0$ καί $\theta = \pi$ ἀντίστοιχα, ἔχουμε ὅτι $\sigma_{\theta\theta} = -4\cdot p$, ἐνῶ γιά τά σημεῖα Γ καί Δ, ὅπου $\theta = \frac{\pi}{2}$ καί $\theta = \frac{3\cdot\pi}{2}$ ἀντίστοιχα, ἔχουμε ὅτι $\sigma_{\theta\theta} = 4\cdot p$.

β.



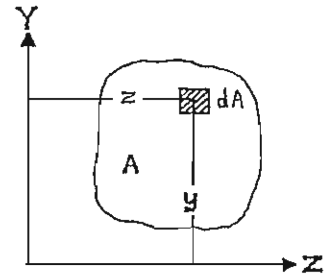
Θά βροῦμε πρῶτα τίς τάσεις, πού καταπονοῦν ἀπειροστό στοιχεῖο σέ πολικές συντεταγμένες. Θέτοντας στίς (3) $r = 2a$, $\theta = 45°$ βρίσκουμε $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_{r\theta} = -\frac{21}{16}\cdot p$.

Ἑπομένως γιά ἀπειροστό ὀρθογώνιο στοιχεῖο μέ προσανατολισμό (X, Y) ἡ καταπόνησή του εἶναι:



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ



Γιά τή διατομή τοῦ σχήματος οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου βάρους δίνονται ἀπό τίς σχέσεις :

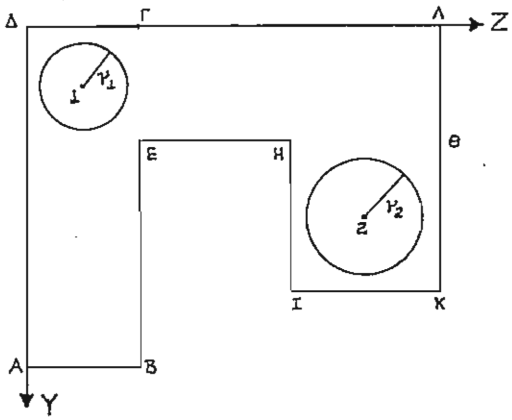
$$z_C = \frac{S_y}{A} \quad , \quad y_C = \frac{S_z}{A} \quad ,$$

ὅπου S_y , S_z οἱ στατικές ροπές ὡς πρός τούς ἄξονες Y καί Z ἀντίστοιχα καί A τό ἐμβαδό τῆς διατομῆς.

Ἄν ἡ θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς διατομῆς δέν εἶναι γνωστή , γιά νά βροῦμε τή στατική ροπή ὡς πρός Z ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς : Θεωροῦμε πάνω στή διατομή μιά στοιχειώδη ἐπιφάνεια ἐμβαδοῦ dA . Ἄς εἶναι y ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους τῆς στοιχειώδους ἐπιφάνειας ἀπό τόν ἄξονα Z. Ἡ στατική ροπή ὡς πρός Z τῆς στοιχειώδους ἐπιφάνειας εἶναι $y \cdot dA$, ἑπομένως ἡ στατική ροπή ὡς πρός Z τῆς διατομῆς θά εἶναι $S_z = \int_A y \cdot dA$.

Οἱ ὑπολογισμοί ἁπλουστεύονται πολύ ἄν ὑπάρχει ἄξονας συμμετρίας, ὁπότε τό κέντρο βάρους τῆς διατομῆς θά βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα συμμετρίας.

Ἄν γνωρίζουμε τή θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς διατομῆς , τότε ἡ στατική της ροπή ὡς πρός κάποιο ἄξονα ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδό τῆς διατομῆς ἐπί τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους της ἀπό τόν ὑπ' ὄψη ἄξονα.



Γιά νά ὑπολογίσουμε τή θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς διατομῆς τοῦ σχήματος, πού ἔχει δύο κυκλικές ὀπές 1 καί 2 ἀκτίνων r_1 καί r_2 ἀντίστοιχα , ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς .

Θεωροῦμε πρός στιγμήν ὅτι ἡ διατομή εἶναι πλήρης χωρίς ὀπές. Ἄς εἶναι S_y , S_z οἱ στατικές ροπές τῆς πλήρους διατομῆς ὡς πρός Y, Z ἀντίστοιχα. Βρίσκουμε ἐπίσης τίς στατικές ροπές τῶν δύο κυκλικῶν ὀπῶν S_{1y} , S_{1z} , S_{2y} , S_{2z} . Τέλος βρίσκουμε τά ἐμβαδά A τῆς πλήρους διατομῆς καί A_1 , A_2 τῶν δύο κυκλικῶν ὀπῶν. Οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου βάρους δίνονται ἀπό τίς σχέσεις :

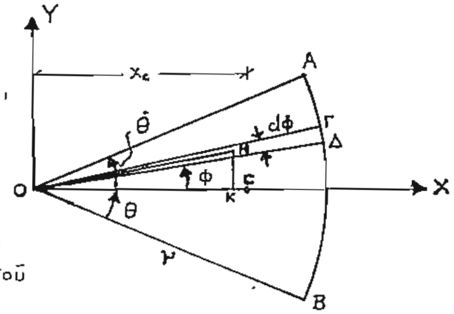
$$z_C = \frac{S_y - S_{1y} - S_{2y}}{A - A_1 - A_2} \quad , \quad y_C = \frac{S_z - S_{1z} - S_{2z}}{A - A_1 - A_2} \; .$$

Τή στατική ροπή της πλήρους διατομής τή βρίσκουμε χωρίζοντάς την στά έπί μέρους όρθογώνια ΑΒΓΔ, ΕΘΛΓ, ΘΗΙΚ καί άθροίζοντας τίς έπί μέρους στατικές ροπές. Βέβαια ή στατική ροπή κάθε όρθογωνίου ώς πρός ένα άξονα θά ίσοῦται μέ τό έμβαδό τοῦ όρθογωνίου έπί τήν άπόσταση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ όρθογωνίου άπό τόν ύπ' όψη άξονα.

ασκηση 1

Νά βρεθεῖ τό κέντρο βάρους τοῦ κυκλικοῦ τομέα τοῦ σχήματος.

λυση



Θεωροῦμε σύστημα άξόνων (X, Y), όπως στό σχῆμα. Λόγω συμμετρίας τό κέντρο βάρους θά κεῖται πάνω στόν άξονα X, έπομένως $y_c = 0$.

Θεωροῦμε ένα στοιχειῶδες τμῆμα τοῦ κυκλικοῦ τομέα, ΟΓΔ. Τό έμβαδό τοῦ στοιχειώδους αὐτοῦ τμήματος εἶναι

$dA = \frac{1}{2}\cdot r\cdot ΓΔ = \frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot d\phi = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot d\phi$, έπομένως τό έμβαδό τοῦ τομέα εἶναι

$$A = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot d\phi = \frac{r^2}{2}\left[\phi\right]_{-\theta}^{\theta} = r^2\cdot\theta .$$

Έπειδή τό στοιχειῶδες τμῆμα ΟΓΔ μποροῦμε κατά προσέγγιση νά τό θεωρήσουμε τριγωνικό, τό κέντρο βάρους του θά άπέχει άπό τό Ο άπόσταση $OH = \frac{2}{3}\cdot r$. Ή άπόσταση, έπομένως, τοῦ κέντρου βάρους τοῦ στοιχειώδους τμήματος άπό τόν άξονα Y θά εἶναι $x = OK = \frac{2}{3}\cdot r\cdot \cos\phi$. Ή στατική ροπή, λοιπόν, τοῦ τομέα ώς πρός τόν άξονα Y εἶναι:

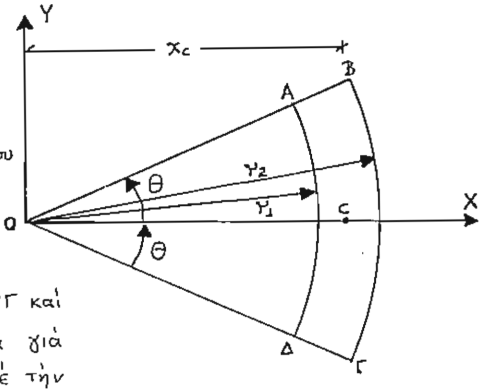
$$S_y = \int_{-\theta}^{\theta} x\cdot dA = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{2}{3}\cdot r\cdot\cos\phi\cdot\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot d\phi = \frac{1}{3}\int_{-\theta}^{\theta} r^3\cdot\cos\phi\cdot d\phi = \frac{1}{3}\cdot r^3\cdot\left[\sin\phi\right]_{-\theta}^{\theta} =$$

$= \frac{2}{3}\cdot r^3\cdot\sin\theta$ καί συνεπῶς ή συντεταγμένη x_c τοῦ κέντρου βάρους του θά εἶναι: $x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{2}{3}\cdot r^3\cdot\sin\theta}{r^2\cdot\theta} = \frac{2}{3}\cdot\frac{r\cdot\sin\theta}{\theta}$, ένῶ $y_c = 0$.

ασκηση 2

Νά βρεθεῖ τό κέντρο βάρους τοῦ κυκλικοῦ δακτύλιου ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος.

λυση



Λόγω συμμετρίας τό κέντρο βάρους τοῦ δακτύλιου θά κεῖται πάνω στόν ἄξονα X, ἐπομένως $y_c = 0$.

Γιά τή συντεταγμένη x_c τοῦ κέντρου βάρους τοῦ δακτύλιου θά ἔχουμε:

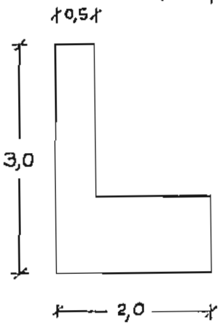
$$x_c = \frac{S_y^{OB\Gamma} - S_y^{OA\Delta}}{A_{OB\Gamma} - A_{OA\Delta}}$$, ὅπου $S_y^{OB\Gamma}$ ἡ στατική ροπή ὡς πρός Y τοῦ τομέα OBΓ καί $A_{OB\Gamma}$ τό ἐμβαδό τοῦ OBΓ. Ἀντίστοιχα γιά τά $S_y^{OA\Delta}$, $A_{OA\Delta}$. Σύμφωνα ὅμως μέ τήν προηγούμενη ἄσκηση θά εἶναι:

$$S_y^{OB\Gamma} = \frac{2}{3}\cdot r_2^3 \cdot \sin\theta \ , \quad S_y^{OA\Delta} = \frac{2}{3}\cdot r_1^3\cdot \sin\theta \ , \quad A_{OB\Gamma} = r_2^2\cdot\theta \ , \quad A_{OA\Delta} = r_1^2\cdot\theta \ .$$

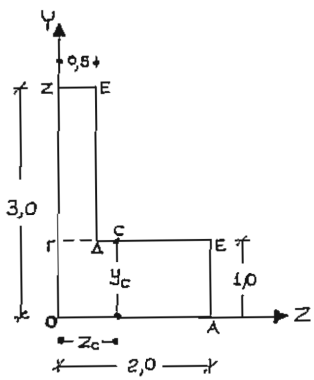
Ἐπομένως θά ἔχουμε: $$x_c = \frac{\frac{2}{3}\cdot r_2^3\cdot\sin\theta - \frac{2}{3}\cdot r_1^3\cdot\sin\theta}{r_2^2\cdot\theta - r_1^2\cdot\theta} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \ ,$$

ἐνῶ $y_c = 0$.

ασκηση 3



Νά βρεθεῖ τό κέντρο βάρους τῆς ἐπιφάνειας τοῦ σχήματος, τῆς ὁποίας οἱ διαστάσεις δίνονται σέ m.



λυση

Θά βροῦμε τίς συντεταγμένες τοῦ κέντρου βάρους ὡς πρός τό σύστημα ἀξόνων (Y, Z), τό ὁποῖο ἐκλέξαμε ἐντελῶς αὐθαίρετα. Θά μπορούσαμε νά ἐκτελέσουμε τόν ὑπολογισμό τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου βάρους ὡς πρός ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σύστημα συντεταγμένων. Ἐπιλέγουμε φυσικά ἐκεῖνο τό σύστημα συντεταγμένων, πού θά ἁπλουστεύει, ὅσο γίνεται, τούς ὑπολογισμούς.

Οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφάνειας θά βρεθοῦν ἀπό τίς σχέσεις

$$z_c = \frac{S_y}{A} \ , \quad y_c = \frac{S_z}{A} \ , \qquad (1)$$

ὅπου S_y, S_z εἶναι οἱ στατικές ροπές τῆς ἐπιφάνειας ὡς πρός τούς ἄξονες Y καί Z ἀντίστοιχα καί A τό ἐμβαδό τῆς διατομῆς.

Τή στατική ροπή S_y θά τή βροῦμε χωρίζοντας τήν ἐπιφάνεια στά ὀρθογώνια ΟΑΕΓ καί ΓΔΕΖ, ὁπότε $S_y = S_y^{ΟΑΕΓ} + S_y^{ΓΔΕΖ}$. Ἡ στατική ροπή ὡς πρός Y κάθε ἐπί μέρους ὀρθογωνίου εἶναι ἴση μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου ἐπί τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους του ἀπό τόν ἄξονα Y. Ἔχουμε λοιπόν:

$$S_y = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 2{,}25 \ m^3$$

Ἐντελῶς ὅμοια ἡ στατική ροπή S_z εἶναι:

$$S_z = S_z^{ΟΑΕΓ} + S_z^{ΓΔΕΖ} = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 3 \ m^3$$

Τό ἐμβαδό **A** τῆς ἐπιφάνειας εἶναι:

$$A = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 = 3 \ m^2$$

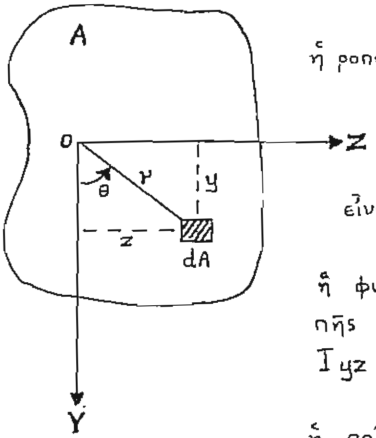
Ἀντικαθιστώντας τίς τιμές αὐτές στίς (1) βρίσκουμε ὅτι οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφάνειας εἶναι:

$$z_c = \frac{2{,}25}{3} = 0{,}75 \ m \quad , \quad y_c = \frac{3}{3} = 1 \ m \ .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Γιά τήν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια **A** τοῦ σχήματος :



ἡ ροπή ἀδράνειας ὡς πρός τόν ἄξονα Y εἶναι
$$I_{yy} = \int_A z^2 \cdot dA \ ,$$

ἡ ροπή ἀδράνειας ὡς πρός τόν ἄξονα Z εἶναι $I_{zz} = \int_A y^2 \cdot dA$,

ἡ φυγόκεντρη ροπή ἀδράνειας ἢ ροπή ἐκτροπῆς ὡς πρός τούς ἄξονες Y καί Z εἶναι
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_A yz \cdot dA = \int_A zy \cdot dA \ .$$

ἡ πολική ροπή ἀδράνειας ὡς πρός τό σημεῖο O εἶναι $I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (y^2+z^2) \cdot dA = I_{yy} + I_{zz}$.

Οἱ ροπές ἀδράνειας I_{yy}, I_{zz} εἶναι μεγέθη <u>πάντοτε θετικά</u>, ἐνῶ τό πρόσημο τῆς ροπῆς ἐκτροπῆς I_{yz} ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Ἀναζητοῦμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων, στό ὁποῖο νά μηδενίζεται ἡ ροπή ἐκτροπῆς , $I_{yz} = 0$. Τό σύστημα αὐτό λέγεται κύριο σύστημα ἀδράνειας καί οἱ ἄξονές του κύριοι ἄξονες ἀδράνειας. Τό κύριο σύστημα ἀδράνειας ἀντιστοιχεῖ σέ γωνία στροφῆς φ , πού δίνεται ἀπό τή σχέση $\tan 2\phi = \dfrac{2 \cdot I_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}}$ (1)

Οἱ κύριες ροπές ἀδράνειας εἶναι:

$$I_1 = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4 \cdot I_{yz}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4 \cdot I_{yz}^2}$$

Γιά νά πάρουμε τό κύριο σύστημα ἀδράνειας στρέφουμε τό σύστημα (Y, Z) κατά γωνία φ , ἀριστερόστροφα μέν γιά θετική τιμή τῆς φ , +↺ , δεξιόστροφα γιά ἀρνητική τιμή τῆς φ , −↻ .

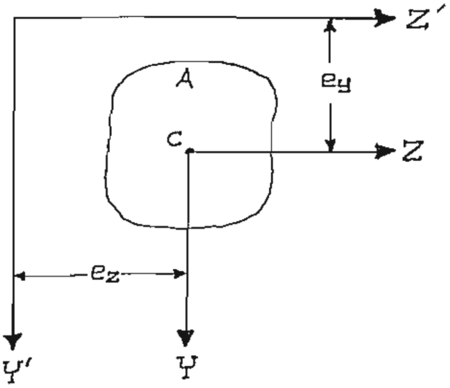
Ἔτσι καθορίζεται ἡ θέση τοῦ κύριου συστήματος ἀδράνειας. Ἡ θέση τῶν κυρίων ἀξόνων καθορίζεται ἀπό τήν ἑξῆς πρόταση:

Ἡ μεγαλύτερη ἀπό τίς κύριες ροπές ἀδράνειας ἀντιστοιχεῖ στόν ἄξονα, ὁ ὁποῖος σχηματίζει τή μικρότερη γωνία μ' ἐκεῖνον ἀπό τούς ἀρχικούς ἄξονες Y, Z, στόν ὁποῖου ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγαλύτερη ἀπό τίς I_{yy}, I_{zz}.

Ἄν ἕνας ἀπό τούς ἄξονες Y, Z εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς διατομῆς, τότε ἡ ροπή ἐκτροπῆς ὡς πρός τό σύστημα ἀξόνων (Y, Z) θά εἶναι μηδενική.

Ἔτσι καθορίζονται οἱ ροπές ἀδράνειας μιᾶς διατομῆς ὡς πρός τούς κεντροβαρικούς της ἄξονες. Οἱ ροπές ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός κάποιους ἄλλους ἄξονες παράλληλους πρός τούς κεντροβαρικούς καθορίζονται μέ βάση τό θεώρημα τοῦ Steiner.

Τό θεώρημα τοῦ Steiner. Θεωροῦμε τήν ἐπιφάνεια A καί τούς κεντροβαρικούς της ἄξονες Y, Z. Θεωροῦμε καί τούς ἄξονες Y′, Z′ παράλληλους πρός τούς Y, Z. Οἱ ροπές ἀδράνειας τῆς διατομῆς A ὡς πρός τούς ἄξονες Y′, Z′ θά εἶναι:



$$I'_{yy} = I_{yy} + e_z^2 \cdot A$$

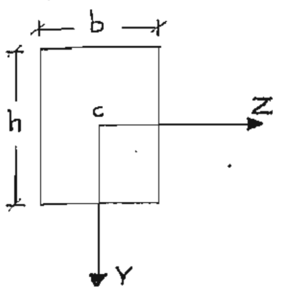
$$I'_{zz} = I_{zz} + e_y^2 \cdot A$$

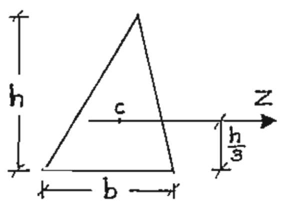
$$I'_{yz} = I_{yz} + e_y \cdot e_z \cdot A$$

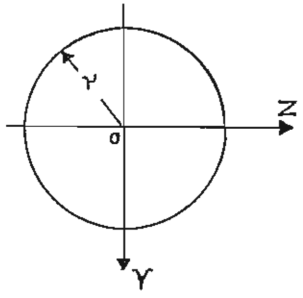
ὅπου A εἶναι τό ἐμβαδό τῆς διατομῆς καί I_{yy}, I_{zz}, I_{yz} οἱ ροπές ἀδράνειας ὡς πρός τούς κεντροβαρικούς ἄξονες Y, Z. Οἱ ὅροι $e_z^2 \cdot A$, $e_y^2 \cdot A$, $e_y \cdot e_z \cdot A$ ὀνομάζονται ροπές μεταφορᾶς.

Παραθέτουμε τίς ροπές ἀδράνειας ὁρισμένων διατομῶν, πού συναντᾶμε πολύ συχνά στίς ἀσκήσεις.

α) ὀρθογωνική διατομή β) τριγωνική διατομή γ) κυκλική διατομή





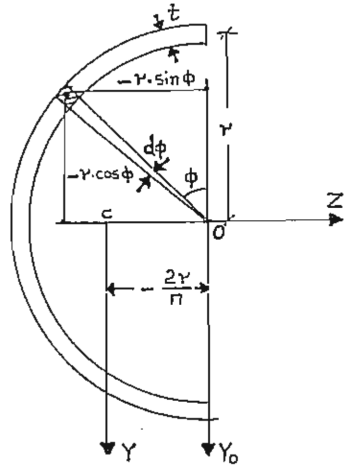


α) $I_{zz} = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$, $I_{yy} = \dfrac{h \cdot b^3}{12}$

β) $I_{zz} = \dfrac{b \cdot h^3}{36}$

γ) $I_{zz} = \dfrac{\pi \cdot r^4}{4}$, $I_{yy} = \dfrac{\pi \cdot r^4}{4}$

ασκηση 1



Γιά τή λεπτότοιχη ἡμικυκλική διατομή τοῦ σχήματος σταθεροῦ πάχους t νά βρεθοῦν οἱ ροπές ἀδράνειας ὡς πρός ἕνα σύστημα κεντροβαρικῶν ἀξόνων, τοῦ ὁποίου ἕνας ἄξονας εἶναι ὁ ἄξονας συμμετρίας τῆς διατομῆς.

λυση

Θά πρέπει νά βροῦμε πρῶτα τή θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς διατομῆς. Θεωροῦμε σύστημα συντεταγμένων (Y_o, Z). Λόγω συμμετρίας τό κέντρο βάρους θά βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα Z. Θεωροῦμε πάνω στή διατομή ἕνα στοιχειῶδες τμῆμα. Τό ἐμβαδό αὐτοῦ τοῦ τμήματος εἶναι $r \cdot d\phi \cdot t$ καί ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους του ἀπό τόν ἄξονα Y_o, $-r \cdot \sin\phi$. Ἑπομένως:

$$S_{y_o} = \int_0^{\pi} (-r \cdot \sin\phi) \cdot r \cdot d\phi \cdot t = r^2 \cdot t \cdot \int_0^{\pi} (-\sin\phi) \cdot d\phi = r^2 \cdot t \cdot \left[\cos\phi\right]_0^{\pi} = -2 r^2 t .$$

Τό ἐμβαδό τῆς ἡμικυκλικῆς διατομῆς εἶναι $A = \pi \cdot r \cdot t$ καί συνεπῶς

$$z_c = \frac{-2 r^2 t}{\pi \cdot r \cdot t} = -\frac{2 \cdot r}{\pi}, \text{ ἐνῶ } y_c = 0.$$

Θά ὑπολογίσουμε τίς ροπές ἀδράνειας ὡς πρός τούς κεντροβαρικούς ἄξονες Y καί Z. Εἶναι:

$$I_{zz} = \int_0^{\pi} r \cdot d\phi \cdot t \cdot (-r \cdot \cos\phi)^2 = r^3 \cdot t \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\phi \cdot d\phi = r^3 \cdot t \cdot \left[\frac{\phi + \sin\phi \cdot \cos\phi}{2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi \cdot r^3 \cdot t}{2} .$$

$$I_{yy} = \int_0^{\pi} r \cdot d\phi \cdot t \cdot \left[-r \cdot \sin\phi - \left(-\frac{2 \cdot r}{\pi}\right)\right]^2 = \int_0^{\pi} r \cdot t \cdot \left(\frac{2r}{\pi} - r \cdot \sin\phi\right)^2 \cdot d\phi =$$

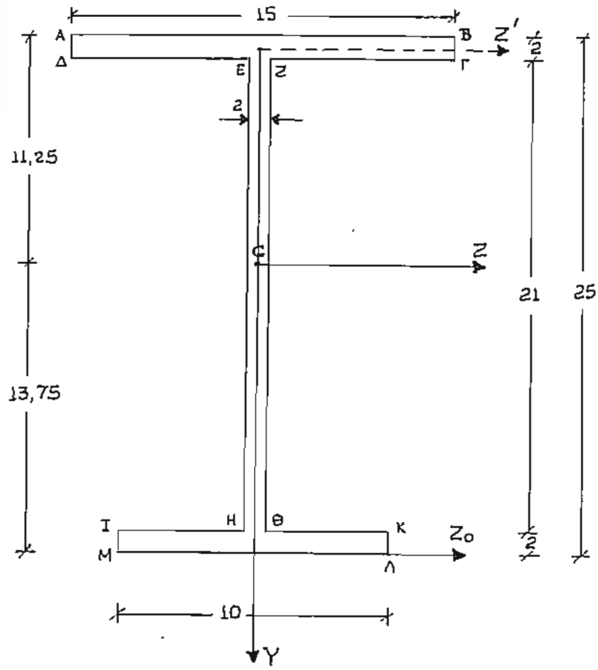
$$= \int_0^{\pi} r \cdot t \cdot \left(\frac{4 r^2}{\pi^2} + r^2 \sin^2\phi - \frac{4 r^2}{\pi} \cdot \sin\phi\right) \cdot d\phi = \int_0^{\pi} \left(\frac{4 \cdot r^3 \cdot t}{\pi^2} + r^3 \cdot t \cdot \sin^2\phi - \frac{4 \cdot r^3 \cdot t}{\pi} \cdot \sin\phi\right) d\phi$$

$$= \frac{4 \cdot r^3 \cdot t}{\pi^2} \cdot \left[\phi\right]_0^{\pi} + r^3 \cdot t \cdot \left[\frac{\phi - \sin\phi \cdot \cos\phi}{2}\right]_0^{\pi} - 4 \cdot r^3 \cdot t \cdot \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4 \cdot r^3 \cdot t}{\pi^2} + \frac{\pi \cdot r^3 \cdot t}{2} - \frac{4 \cdot r^3 \cdot t \cdot 2}{\pi} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot t}{2} - \frac{4 \cdot r^3 \cdot t}{\pi} = r^3 \cdot t \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right).$$

Ἐπειδή ἡ διατομή ἔχει ἄξονα συμμετρίας, ἡ $I_{yz} = 0$.

ασκηση 2



Γιά τή διατομή τοῦ σχήματος, τῆς ὁποίας οἱ διαστάσεις δίνονται σέ cm, νά βρεθοῦν οἱ ροπές ἀδράνειας ὡς πρός σύστημα κεντροβαρικῶν ἀξόνων, ἀπό τούς ὁποίους ἕνας εἶναι ὁ ἄξονας συμμετρίας τῆς διατομῆς.

λυση

Θά βροῦμε πρῶτα τή θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς διατομῆς. Θεωροῦμε σύστημα ἀξόνων (Y, Z_o) μέ ἄξονα Y τόν ἄξονα συμμετρίας τῆς διατομῆς. Τό κέντρο βάρους θά βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα Y. Ὁ ἄξονας Z_o ἐκλέχθηκε αὐθαίρετα. Ἡ στατική ροπή τῆς διατομῆς ὡς πρός Z_o εἶναι:

$S_{Z_o} = 2\cdot 15\cdot(-24) + 2\cdot 21\cdot(-12{,}5) + 2\cdot 10\cdot(-1) = -1265 \text{ cm}^3$. Τό ἐμβαδό A τῆς διατομῆς εἶναι: $A = 2\cdot 15 + 2\cdot 21 + 2\cdot 10 = 92 \text{ cm}^2$. Ἑπομένως ἡ συντεταγμένη y_c τοῦ κέντρου βάρους εἶναι $y_c = \dfrac{S_{Z_o}}{A} = \dfrac{-1265}{92} = -13{,}75$ cm.

Θά βροῦμε τίς ροπές ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τό σύστημα κεντροβαρικῶν ἀξόνων (Y, Z).

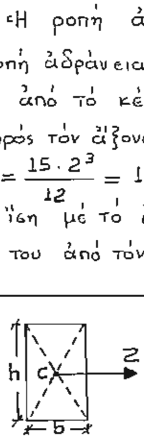
Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Z εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν ἀδράνειας ὡς πρός τόν ἄξονα Z τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΘΗ, ΙΚΛΜ.

Ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ ΑΒΓΔ ὡς πρός τόν ἄξονα Z εἶναι ἴση μέ τή ροπή ἀδράνειας τοῦ ΑΒΓΔ ὡς πρός τόν ἄξονα Z', παράλληλο τοῦ Z καί διερχόμενο ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ ΑΒΓΔ, σύν τή ροπή **μεταφορᾶς τοῦ** ΑΒΓΔ ὡς πρός τόν ἄξονα Z. Ἡ ροπή τοῦ ΑΒΓΔ ὡς πρός τόν ἄξονα Z' εἶναι:

$I_1 = \dfrac{15\cdot 2^3}{12} = 10 \text{ cm}^4$ *. Ἡ ροπή **μεταφορᾶς τοῦ** ΑΒΓΔ ὡς πρός τόν ἄξονα Z εἶναι ἴση μέ τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΓΔ ἐπί τό τετράγωνο τῆς ἀπόστασης τοῦ κέντρου βάρους του ἀπό τόν ἄξονα Z, δηλαδή $I_2 = 2\cdot 15\cdot(11{,}25 - 1)^2 = 3151{,}88 \text{ cm}^4$. Ἑπομένως

---

*



Γιά τήν ὀρθογωνική διατομή τοῦ σχήματος ἰσχύει: $I_{zz} = \dfrac{b\cdot h^3}{12}$

ἡ ροπή τοῦ ΑΒΓΔ ὡς πρός τόν ἄξονα Z εἶναι : $I_{zz}^{AB\Gamma\Delta} = I_1 + I_2 = 3161,88 \ cm^4$.

Ὅμοια ἔχουμε $I_{zz}^{EZ\Theta H} = \frac{2 \cdot 21^3}{12} + 2 \cdot 21 \cdot (11,75 - 10,5)^2 = 1609,13 \ cm^4$ καί $I_{zz}^{IK\Lambda M} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 10 \cdot 2 \cdot (13,75 - 1)^2 = 3257,92 \ cm^4$ καί ἑπομένως ἡ ροπή ἀδράνειας ὅλης τῆς διατομῆς εἶναι : $I_{zz} = I_{zz}^{AB\Gamma\Delta} + I_{zz}^{EZ\Theta H} + I_{zz}^{IK\Lambda M} = 8028,93 \ cm^4$.

Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Y , ὁ ὁποῖος εἶναι κεντροβαρικός ἄξονας γιά καθένα ἀπό τά τμήματα ΑΒΓΔ , ΕΖΘΗ , ΙΚΛΜ , θά εἶναι :

$$I_{yy} = \frac{2 \cdot 15^3}{12} + \frac{21 \cdot 2^3}{12} + \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 743,17 \ cm^4 .$$

Ἡ ροπή **ἐκτροπῆς** ὡς πρός τό σύστημα ἀξόνων (Y, Z) εἶναι μηδενική , διότι ὁ ἄξονας Y εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς διατομῆς , $I_{yz} = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΚΑΜΨΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΔΟΚΩΝ

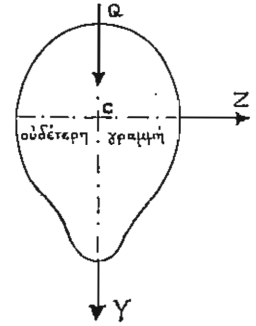
α. ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ

Μποροῦμε νά διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις :

1) ὀρθή ἤ συμμετρική κάμψη (ἀσκήσεις 1,2,3,4).

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ διατομή τῆς δοκοῦ ἔχει ἕναν ἄξονα συμμετρίας παράλληλα πρός τόν ὁποῖο δρᾶ ἡ ἐξωτερική φόρτιση, ἡ ὁποία προκαλεῖ καμπτική ροπή κάθετη πρός τόν ἄξονα αὐτόν συμμετρίας. Μποροῦμε ἰσοδύναμα νά ὁρίσουμε τήν ὀρθή ἤ συμμετρική κάμψη σάν ἐκείνη τήν περίπτωση τῆς κάμψης, στήν ὁποία τό ἐπίπεδο τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων περιέχει ἕναν ἀπό τούς κύριους ἄξονες ἀδράνειας τῆς διατομῆς.

Ὁ οὐδέτερος ἄξονας (ὁ ἄξονας δηλαδή, πού τό μῆκος του δέν ἀλλάζει μετά τήν κάμψη) στήν περίπτωση αὐτή εἶναι ἡ εὐθεία, πού ἑνώνει τά κέντρα βάρους τῶν διατομῶν. Οὐδέτερο ἐπίπεδο εἶναι ἐκεῖνο, στό ὁποῖο οἱ ὀρθές τάσεις καί παραμορφώσεις εἶναι μηδενικές. Ἡ τομή τοῦ οὐδέτερου ἐπιπέδου μέ τή διατομή λέγεται οὐδέτερη γραμμή.



Θά θεωρήσουμε σάν ἄξονα X τόν οὐδέτερο ἄξονα τῆς δοκοῦ. Ἐπίσης θά θεωρήσουμε ὅτι ἄξονας συμμετρίας τῆς διατομῆς εἶναι ὁ ἄξονας Y, πάνω στόν ὁποῖο δρᾶ ἡ ἐξωτερική φόρτιση Q. Τότε ἡ οὐδέτερη γραμμή συμπίπτει μέ τόν ἄξονα Z.

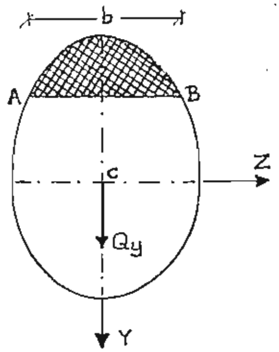
Οἱ ὀρθές τάσεις, πού προκαλοῦνται, εἶναι :

$\sigma_{xx} = \frac{y}{I_{zz}} \cdot M_z$, (1) , ὅπου I_{zz} ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Z καί M_z ἡ καμπτική ροπή.

Ἀπό τήν (1) προκύπτει ὅτι γιά ὁρισμένη τιμή τῆς M_z ἡ μέγιστη τάση στή διατομή ἀναπτύσσεται γιά $y = y_{max.}$ καί εἶναι $\sigma_{max.} = \frac{M_z}{I_{zz}} \cdot y_{max.}$

Τό λόγο $\frac{I_{zz}}{y_{max.}}$ ὀνομάζουμε ροπή ἀντίστασης τῆς διατομῆς καί τόν παριστάνουμε μέ W.

Θά χρησιμοποιοῦμε τόν τύπο (1) στίς ἀσκήσεις, χωρίς νά τοποθετοῦμε τά πρόσημα τῶν ὅρων, πού ὑπεισέρχονται σ' αὐτόν. Τότε ὅμως γιά νά βροῦμε τήν προσημασμένη τιμή τῆς σ_{xx} γιά ἕνα δοσμένο σημεῖο τοῦ σώματος, προσέχουμε τί ὀρθές τάσεις προκαλεῖ ἡ καμπτική ροπή σ' αὐτό τό σημεῖο. Ἄν αὐτές εἶναι ἐφελκυστικές, τότε ἡ προσημασμένη τιμή τῆς σ_{xx} εἶναι θετική, ἐνῶ ἄν εἶναι θλιπτικές ἡ προσημασμένη τιμή τῆς σ_{xx} εἶναι ἀρνητική.



Οἱ διατμητικές τάσεις, πού προκαλοῦνται στήν τομή AB ἀπό τήν τέμνουσα Q_y, εἶναι:

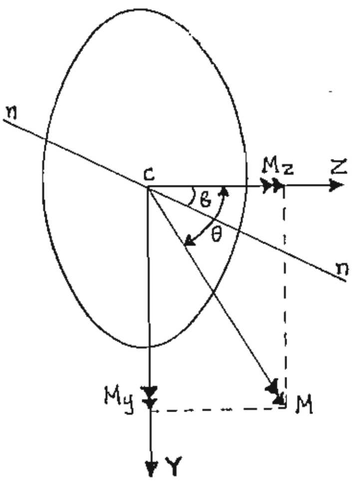
$$\sigma_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z}{I_{zz} \cdot b}$$, ὅπου Q_y ἡ τέμνουσα δύναμη,

S_z ἡ στατική ροπή τοῦ σκιαγραφημένου τμήματος τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Z.

2) λοξή ἤ ἀσύμμετρη κάμψη (ἀσκήσεις 5,6).

Στήν περίπτωση αὐτή τό ἐπίπεδο τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων δέν περιέχει κανέναν ἀπό τούς κύριους ἄξονες ἀδράνειας τῆς διατομῆς. Διακρίνουμε τίς ἑξῆς ἐπί μέρους περιπτώσεις:

i) λοξή κάμψη διατομῶν μέ 2 ἄξονες συμμετρίας.



Ἀναλύουμε τήν καμπτική ροπή σέ 2 συνιστῶσες, μιά κατά τόν ἄξονα Z, τήν $M_z = M \cdot \cos\theta$, καί μιά κατά τόν ἄξονα Y, τήν $M_y = M \cdot \sin\theta$. Ἡ ὀρθή τάση λόγω M_z εἶναι: $\sigma_{xx}^{M_z} = -\dfrac{M_z \cdot y}{I_{zz}}$,

ὅπου τό πρόσημο (−) δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς: στό τμῆμα τῆς διατομῆς πάνω ἀπό τόν ἄξονα Z, ὅπου τό y εἶναι ἀρνητικό, ἡ M_z προκαλεῖ ἐφελκυστικές τάσεις. Δεδομένου ὅτι γιά τό τμῆμα αὐτό τῆς ὑπ' ὄψη διατομῆς εἶναι τό y ἀρνητικό καί πρέπει τελικά νά προκύψει ἡ σ_{xx} θετική, τοποθετοῦμε τό πρόσημο (−). Ἡ ὀρθή τάση λόγω M_y εἶναι:

$$\sigma_{xx}^{M_y} = \frac{M_y \cdot z}{I_{yy}} .$$

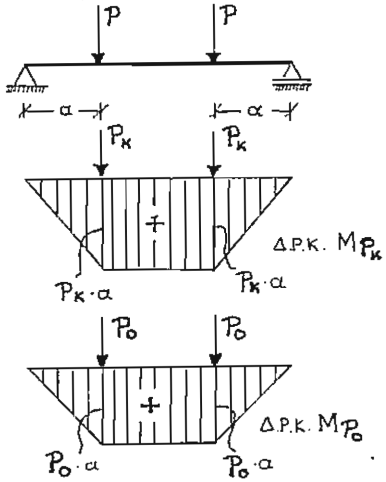
Ἡ συνολική ὀρθή τάση εἶναι: $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{M_z} + \sigma_{xx}^{M_y} = -\dfrac{M_z \cdot y}{I_{zz}} + \dfrac{M_y \cdot z}{I_{yy}}$.

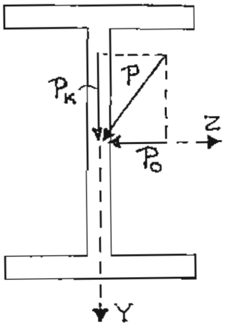
Ἡ ἐξίσωση τῆς οὐδέτερης γραμμῆς nn προκύπτει ἀπό τή σχέση $\sigma_{xx}=0$ καί εἶναι: $-\dfrac{\cos\theta}{I_{zz}} \cdot y + \dfrac{\sin\theta}{I_{yy}} \cdot z = 0 \Rightarrow \dfrac{y}{z} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{I_{zz}}{I_{yy}} \Rightarrow$

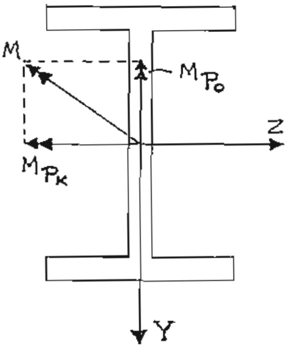
$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{I_{zz}}{I_{yy}} \cdot \tan\theta .$$

Είπαμε πρίν ότι θά χρησιμοποιούμε τόν τύπο $\sigma_{xx} = \frac{y \cdot M_z}{I_{zz}}$ προσέχοντας τί τάσεις προκαλεί σ' ένα δοσμένο σημείο ή καμπτική ροπή. Γιά νά μπορούμε όμως νά διαπιστώσουμε, άν οί τάσεις πού προκαλούνται σ'ένα σημείο τής διατομής είναι εφελκυστικές ή θλιπτικές, πρέπει νά έχουμε τοποθετήσει προηγουμένως στή διατομή τά διανύσματα τών 2 συνιστωσών τής καμπτικής ροπής.

Έστω, πχ., ή δοκός τού σχήματος διατομής διπλού ταύ, πού δέχεται τίς φορτίσεις P.

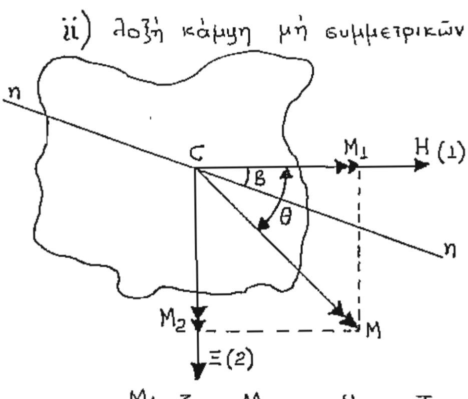






Αναλύουμε τήν P σέ 2 συνιστώσες, τήν P_K κατά τόν άξονα Y καί τήν P_O κατά τόν άξονα Z. Σχεδιάζουμε τά διαγράμματα καμπτικών ροπών γιά τήν καθεμιά δύναμη χωριστά. Έτσι μπορούμε νά ξέρουμε σέ κάθε σημείο τού σώματος τήν τιμή τής καμπτικής ροπής, όχι όμως καί τήν κατεύθυνσή της. Γιά νά τήν γνωρίζουμε καί αυτήν, τοποθετούμε πάνω στή διατομή τά διανύσματα τών 2 συνιστωσών τής καμπτικής ροπής.

ii) Λοξή κάμψη μή συμμετρικών διατομών στό κύριο σύστημα αξόνων.



Βρίσκουμε τούς κύριους άξονες αδράνειας τής διατομής Η καί Ξ. Αναλύουμε τήν καμπτική ροπή σέ συνιστώσες κατά τούς άξονες Η καί Ξ, $M_1 = M \cdot \cos\theta$, $M_2 = M \cdot \sin\theta$.

Τότε γιά ένα σημείο μέ συντεταγμένες η καί ξ <u>ώς πρός τούς κύριους άξονες</u> θά έχουμε: $\sigma_{xx}^{M_1} = -\frac{M_1}{I_1} \cdot \xi$, $\sigma_{xx}^{M_2} = \frac{M_2}{I_2} \cdot \eta$ καί επομένως

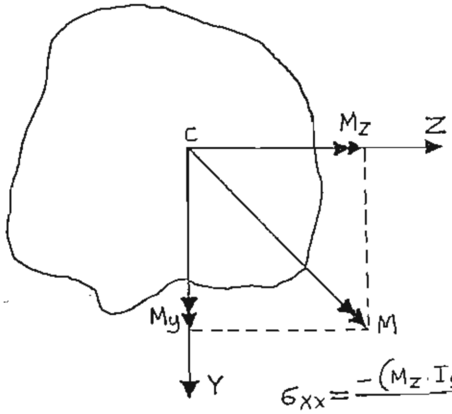
$$\sigma_{xx} = -\frac{M_1}{I_1} \cdot \xi + \frac{M_2}{I_2} \cdot \eta$$

, όπου I_1, I_2 οί κύριες ροπές αδράνειας τής διατομής.

Ἡ ἐξίσωση τῆς οὐδέτερης γραμμῆς nn βρίσκεται ἀπό τή σχέση $\sigma_{xx}=0$, δηλαδή $\frac{\xi}{\eta}=\tan\theta\cdot\frac{I_1}{I_2} \Rightarrow \tan\beta=\frac{I_1}{I_2}\cdot\tan\theta$.

Τονίζουμε καί πάλι ὅτι οἱ συντεταγμένες η καί ξ εἶναι ὡς πρός τό κύριο σύστημα ἀδράνειας τῆς διατομῆς. Γιά ἕνα δοσμένο σημεῖο, ἐπομένως, γιά τό ὁποῖο γνωρίζουμε τίς συντεταγμένες του ὡς πρός τό σύστημα συντεταγμένων (Y, Z) τῆς διατομῆς (πού στήν περίπτωση αὐτή εἶναι διαφορετικό ἀπό τό κύριο σύστημα), θά πρέπει νά βρίσκουμε τίς συντεταγμένες του στό κύριο σύστημα ἀδράνειας τῆς διατομῆς.

iii) Λοξή κάμψη μή συμμετρικῶν διατομῶν σέ τυχόν σύστημα κεντροβαρικῶν ἀξόνων.



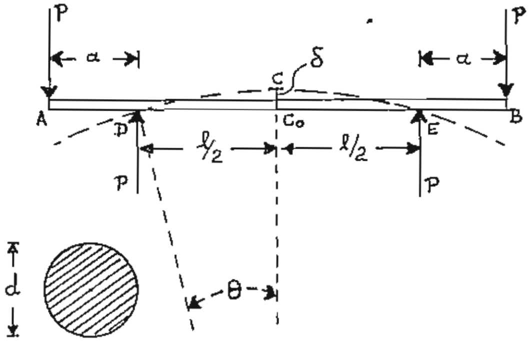
Ἐπειδή τό σύστημα τῶν ἀξόνων εἶναι τυχόν, ἡ ροπή ἐκτροπῆς I_{yz} θά εἶναι διάφορη ἀπό τό μηδέν. Οἱ ὀρθές τάσεις δίνονται ἀπό τή σχέση:

$$\sigma_{xx}=\frac{-(M_z\cdot I_{yy}+M_y\cdot I_{yz})\cdot y+(M_y\cdot I_{zz}+M_z\cdot I_{yz})\cdot z}{I_{yy}\cdot I_{zz}-I_{yz}^2} \qquad (2)$$

Στήν ἀπόδειξη τοῦ τύπου (2) ἔχει ληφθεῖ ὑπ' ὄψη ἡ φορά τῶν συνιστωσῶν M_y, M_z τοῦ καμπτικοῦ ζεύγους M, ὅπως αὐτές εἶναι σχεδιασμένες στό σχῆμα. Γι' αὐτό στίς ἐφαρμογές τοῦ τύπου (2) ἡ τυχοῦσα συνιστῶσα τοῦ καμπτικοῦ ζεύγους (M_y ἤ M_z) θά παίρνεται μέ θετικό πρόσημο, ὅταν κατευθύνεται πρός τίς θετικές συντεταγμένες τοῦ ἀντίστοιχου ἄξονα (Y ἤ Z).

Τέλος ὑπάρχει καί ἡ περίπτωση τῆς ἔκκεντρης ἀξονικῆς φόρτισης, στήν ὁποία ἡ ἐξωτερική φόρτιση εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα τῆς δοκοῦ, χωρίς ὅμως καί νά διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τῆς διατομῆς.

ασκηση 1.



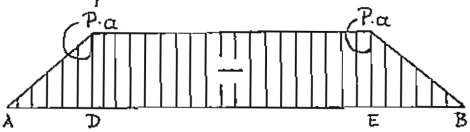
Ἄξονας ἀτμομηχανῆς κυκλικῆς διατομῆς μέ ἐξωτερικά ἕδρανα A καί B καταπονεῖται ὅπως στό σχῆμα.

Ζητοῦνται:

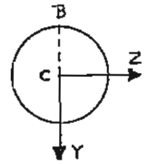
α. ἡ μέγιστη ὀρθή ἐφελκυστική τάση λόγω κάμψης, πού ἀναπτύσσεται στόν ἄξονα.

β. τό βέλος δ στό μέσο C τοῦ ἄξονα συναρτήσει τοῦ μήκους $DE = \ell$ καί τῆς ἀκτίνας καμπυλότητας R τοῦ οὐδέτερου ἄξονα. Δίνονται: $\ell = 1{,}50\ m$, $\alpha = 0{,}35\ m$, $d = 0{,}25\ m$, $P = 12{,}0\ t$.

λυση



Δ.Ρ.Κ.

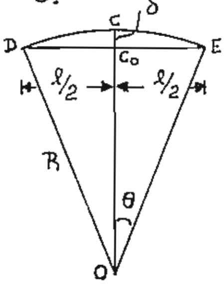


α. Ἀπό τό διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψης προκύπτει ὅτι ἡ κατ' ἀπόλυτη τιμή μέγιστη καμπτική ροπή ἰσοῦται μέ $P\cdot\alpha$. Οἱ ὀρθές τάσεις δίνονται ἀπό τή σχέση $\sigma_{xx} = \dfrac{M_z}{I_{zz}}\cdot y$, ὅπου $I_{zz} = \dfrac{\pi\cdot r^4}{4} = \dfrac{\pi\cdot d^4}{64}$.

Ἡ μέγιστη ὀρθή ἐφελκυστική τάση ἀναπτύσσεται στό σημεῖο B τῆς διατομῆς καί εἶναι:

$$\sigma_{xx\,max} = \frac{P\cdot\alpha}{\frac{\pi\cdot d^4}{64}}\cdot\frac{d}{2} = \frac{64\cdot P\cdot\alpha\cdot d}{2\cdot\pi\cdot d^4} = \frac{64\cdot 12\,t\cdot 35\,cm\cdot 25\,cm}{2\cdot 3{,}14\cdot 25^4\,cm^4} = +0{,}274\ t/cm^2.$$

β.

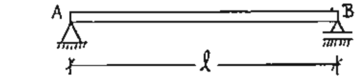


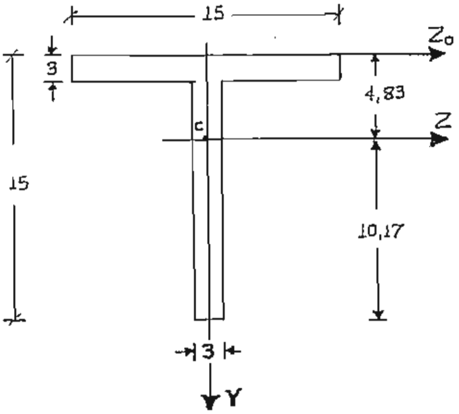
Ἀπό τό διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψης προκύπτει ὅτι γιά τό τμῆμα DE ἡ ροπή κάμψης εἶναι σταθερή καί ἴση μέ $-P\cdot\alpha$. Γιά τό τμῆμα αὐτό, ἑπομένως, ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας τοῦ οὐδέτερου ἄξονα εἶναι σταθερή καί τό DCE θά εἶναι τόξο κύκλου. Ἔχουμε:

$$\delta = CC_o = OC - OC_o = R - R\cdot\cos\theta = R\cdot(1-\cos\theta) =$$
$$= R\cdot\left(1-\sqrt{1-\sin^2\theta}\right) = R\cdot\left(1-\sqrt{1-\theta^2}\right) = R\cdot\left[1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{R\cdot\theta^2}{2} = \frac{R\cdot\sin^2\theta}{2} = \frac{R}{2}\cdot\left(\frac{\ell/2}{R}\right)^2 = \frac{\ell^2}{8\cdot R}\ ,\quad \text{διότι}$$

ἐπειδή τό θ εἶναι πολύ μικρό, ἔχουμε ὅτι $\sin\theta \simeq \theta$, $\sqrt{1-\theta^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\cdot\theta^2$.

ασκηση 2





Ἀμφιέρειστη δοκός μέ τή διατομή τοῦ σχήματος ὑφίσταται κάμψη λόγω τοῦ βάρους της. Ἄν ἡ δοκός ἔχει βάρος ἀνά μονάδα μήκους $q = 50\ Kp/m$, ζητεῖται νά βρεθεῖ πόση μπορεῖ νά εἶναι ἡ μέγιστη ἀπόσταση l τῶν ὑποστηριγμάτων A καί B, ὥστε ἡ μέγιστη τάση ἐφελκυσμοῦ πού θ' ἀναπτυχθεῖ στή δοκό, νά μήν ὑπερβαίνει τήν ἐπιτρεπόμενη $\sigma_{\varepsilon\pi.} = 250\ Kp/cm^2$.

Οἱ διαστάσεις τῆς διατομῆς εἶναι σέ cm.

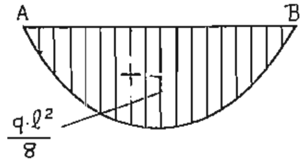
λυση

Θά καθορίσουμε πρῶτα τή θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς διατομῆς. Ἐπειδή ὁ ἄξονας Y εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς διατομῆς, τό κέντρο βάρους θά βρίσκεται πάνω σ' αὐτόν. Ἡ στατική ροπή ὡς πρός Z_o εἶναι $S_{Z_o} = 15\cdot 3\cdot 1{,}5 + 12\cdot 3\cdot (6+3) = 391{,}5\ cm^3$ καί ἑπομένως $y_c = \dfrac{S_{Z_o}}{A} = $

$$= \frac{391{,}5}{15\cdot 3 + 12\cdot 3} = 4{,}83\ cm.$$

Ἡ ροπή ἀδράνειας ὡς πρός τόν ἄξονα Z εἶναι:

$$I_{zz} = \frac{15\cdot 3^3}{12} + 3\cdot 15\cdot (4{,}83-1{,}5)^2 + \frac{3\cdot 12^3}{12} + 3\cdot 12\cdot (10{,}17-6)^2 = 1590{,}75\ cm^4$$



Ἡ μέγιστη ροπή κάμψης ἐμφανίζεται στό μέσο τῆς δοκοῦ καί εἶναι: $M_{max.} = \dfrac{q\cdot l^2}{8}$.

Ἡ μέγιστη τάση ἐφελκυσμοῦ εἶναι:

$$\sigma_{max.} = \frac{M_{max.}}{I_{zz}}\cdot y_{max.} = \frac{q\cdot l^2}{8\cdot I_{zz}}\cdot y_{max.}$$

Θά πρέπει $\sigma_{max.} \leq \sigma_{\varepsilon\pi.} \Rightarrow \dfrac{q\cdot l^2}{8\cdot I_{zz}}\cdot y_{max.} \leq \sigma_{\varepsilon\pi.} \Rightarrow$

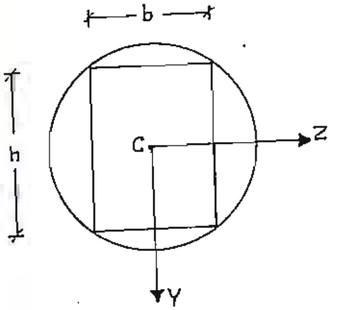
$$\Rightarrow l \leq \sqrt{\frac{8\cdot I_{zz}\cdot \sigma_{\varepsilon\pi.}}{q\cdot y_{max.}}} \Rightarrow l \leq \sqrt{\frac{8\cdot 1590{,}75\ cm^4\cdot 250\ Kp/cm^2}{\frac{50}{100}\ \frac{Kp}{cm}\cdot 10{,}17\ cm}} \Rightarrow l \leq 791\ cm$$

$\Rightarrow l \leq 7{,}91\ m$, ὁπότε ἡ μέγιστη ἀπόσταση τῶν 2 ὑποστηριγμάτων A καί B εἶναι $l_{max.} = 7{,}91\ m$.

άσκηση 3

Ἀπό κυλινδρικό κορμό δένδρου ὁρισμένης διαμέτρου δημιουργοῦμε δοκό ὀρθογωνικῆς διατομῆς διαστάσεων $b \times h$. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος $\frac{b}{h}$, ὥστε ἡ δοκός νά παρουσιάζει τή μέγιστη ἀντοχή σέ κάμψη.

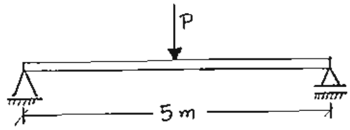
λύση



Οἱ ὀρθές τάσεις, πού προκαλοῦνται στήν ὀρθογωνική δοκό λόγω κάμψης, εἶναι: $\sigma = \frac{M}{I_{zz}} \cdot y$.
Γιά δοσμένη καμπτική ροπή ἡ ὀρθή τάση παίρνει ἀκραία τιμή γιά $y = y_{max}$ καί εἶναι $\sigma_0 = \frac{M}{I_{zz}} \cdot y_{max}$.
Ὁ λόγος $\frac{I_{zz}}{y_{max}}$ ἀντιπροσωπεύει τή ροπή ἀντίστασης W τῆς διατομῆς, $W = \frac{I_{zz}}{y_{max}}$, ἄρα $\sigma_0 = \frac{M}{W}$ (1).

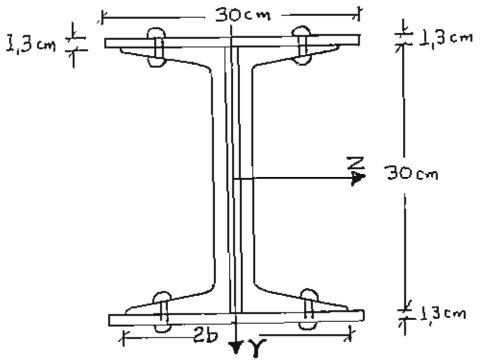
Γιά δοσμένη καμπτική ροπή ἡ μέγιστη ἀντοχή τῆς δοκοῦ σέ κάμψη ἐκφράζεται ἀπό τήν ἐλάχιστη ὀρθή τάση λόγω κάμψης, πού παραλαμβάνει ἡ δοκός. Ἀπό τήν (1) προκύπτει ὅτι ἡ σ_0 γίνεται ἐλάχιστη, ὅταν ἡ W γίνει μέγιστη. Μέγιστη, λοιπόν, ροπή ἀντίστασης συνεπάγεται καί μέγιστη ἀντοχή τῆς δοκοῦ σέ κάμψη.

Εἶναι: $W = \frac{I_{zz}}{y_{max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} \Rightarrow W = \frac{b \cdot h^2}{6}$. Ἄν D ἡ διάμετρος τοῦ κυλινδρικοῦ κορμοῦ, τότε $h^2 = D^2 - b^2$, ὁπότε $W = \frac{b \cdot (D^2 - b^2)}{6}$.
Γιά νά εἶναι ἡ W μέγιστη, θά πρέπει $\frac{dW}{db} = 0 \Rightarrow \frac{D^2 - 3 \cdot b^2}{6} = 0 \Rightarrow D^2 - 3 \cdot b^2 = 0$
$\Rightarrow b^2 = \frac{D^2}{3} \Rightarrow b = 0{,}58 \cdot D$, ὁπότε
$h = \sqrt{D^2 - b^2} = \sqrt{D^2 - (0{,}58 \cdot D)^2} = 0{,}82 \cdot D$ καί $\frac{b}{h} = \frac{0{,}58 \cdot D}{0{,}82 \cdot D} \Rightarrow \frac{b}{h} = 0{,}7$.

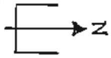


άσκηση 4

Ἡ σύνθετη δοκός τοῦ σχήματος ἀποτελεῖται ἀπό δύο [τῶν 300 mm καί εἶναι ἐνισχυμένη μέ δύο λεπίδες $(30 \times 1{,}3)$ cm στά πάνω καί κάτω πέλματα. Ἡ σύνδεση γίνεται μέ καρφιά διαμέτρου $d = 21$ mm. Ζητεῖται τό μέγιστο φορτίο P, πού μπορεῖ νά φέρει στό μέσο της ἀμφιέρειστη δοκός ἀνοίγματος 5 m,



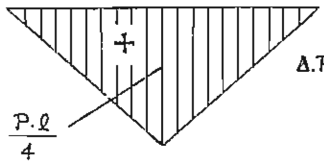
καὶ ἡ ἀπόσταση e τῶν καρφιῶν.

Δίνεται ὅτι ἡ ἐπιτρεπόμενη ὀρθὴ τάση εἶναι $\sigma_{\varepsilon\pi.}^{o\rho.} = 1200\ \text{kp/cm}^2$ καὶ ἡ ἐπιτρεπόμενη διατμητικὴ τάση εἶναι $\sigma_{\varepsilon\pi.}^{\delta\iota\alpha\tau.} = 500\ \text{kp/cm}^2$. Ἐπίσης δίνεται ὅτι ἡ ροπὴ ἀδράνειας τῆς διατομῆς  τῶν 300 mm ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Z εἶναι 8030 cm⁴.

Λυση

Ἐξ αἰτίας τοῦ φορτίου P ἡ δοκὸς θὰ ὑποστεῖ κάμψη. Οἱ ὀρθὲς τάσεις λόγω κάμψης εἶναι $\sigma_{xx} = \dfrac{M}{I_{zz}} \cdot y$, ὅπου $I_{zz} =$

$$= 2 \cdot \frac{30 \cdot 1{,}3^3}{12} + 2 \cdot 30 \cdot 1{,}3 \cdot (15 + 0{,}65)^2 + 2 \cdot 8030 = 35174{,}94\ \text{cm}^4.$$

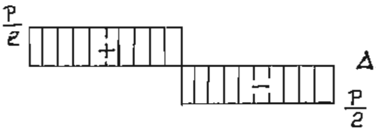


Ἡ μέγιστη ὀρθὴ τάση εἶναι $\sigma_{xx\,max.} = \dfrac{M_{max.}}{I_{zz}} \cdot y_{max.}$. Ἡ μέγιστη ροπὴ κάμψης εἶναι : $M_{max.} = \dfrac{P \cdot \ell}{4} = \dfrac{500 \cdot P}{4}$ Kp·cm. Ἐπίσης $\sigma_{xx\,max.} = \sigma_{\varepsilon\pi.}^{o\rho.} = 1200\ \text{kp/cm}^2$, $y_{max.} = 16{,}3$ cm, ὁπότε ἔχουμε:

$$1200\ \text{kp/cm}^2 = \frac{\dfrac{500 \cdot P}{4}\ \text{kp.cm} \cdot 16{,}3\ \text{cm}}{35174{,}94\ \text{cm}^4} \Rightarrow P = 20717\ \text{kp}$$

, ἑπομένως τὸ μέγιστο φορτίο ποὺ μπορεῖ νὰ φέρει ἡ δοκὸς στὸ μέσο της εἶναι $P = 20.717$ kp.

Μεταξὺ τῶν λεπίδων καὶ τῆς δοκοῦ θ' ἀναπτυχθοῦν διατμητικὲς τάσεις, ποὺ δίνονται ἀπὸ τὴ σχέση $\sigma_{xy} = \dfrac{Q \cdot S_z}{I_{zz} \cdot 2b}$, ὅπου S_z ἡ στατικὴ ροπὴ τῆς λεπίδας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Z. Ἡ στατικὴ αὐτὴ ροπὴ ἰσοῦται κατὰ τὰ γνωστὰ μὲ τὸ ἐμβαδὸ τῆς λεπίδας ἐπὶ τὴν ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους της ἀπὸ τὸν ἄξονα Z. Εἶναι λοιπόν :



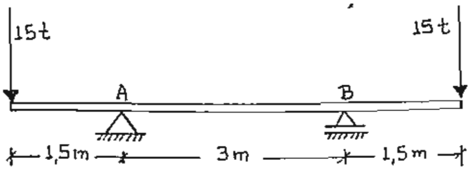
$$\sigma_{xy} = \frac{\dfrac{P}{2}\ \text{kp} \cdot 30 \cdot 1{,}3 \cdot 15{,}65\ \text{cm}^3}{35174{,}94\ \text{cm}^4 \cdot 2 \cdot b \cdot \text{cm}} = \frac{89{,}87}{b}\ \text{kp/cm}^2.$$

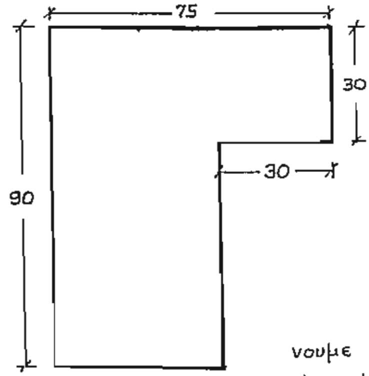
Αὐτὲς τὶς διατμητικὲς τάσεις θὰ τὶς παραλάβουν τὰ καρφιά. Ἡ ἀπόσταση e τῶν καρφιῶν θὰ προκύψει ἀπὸ τὴ σχέση :

$$\sigma_{xy} \cdot b \cdot e = A_{\kappa\alpha\rho.} \cdot \sigma_{\varepsilon\pi.}^{\delta\iota\alpha\tau.} \Rightarrow \frac{89{,}87}{b} \cdot b \cdot e = \frac{\pi \cdot 2{,}1^2}{4} \cdot 500 \Rightarrow e = 19{,}27\ \text{cm}.$$

ἑπομένως τὰ καρφιὰ πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν σὲ ἀπόσταση 19,27 cm τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.

ασκηση 5



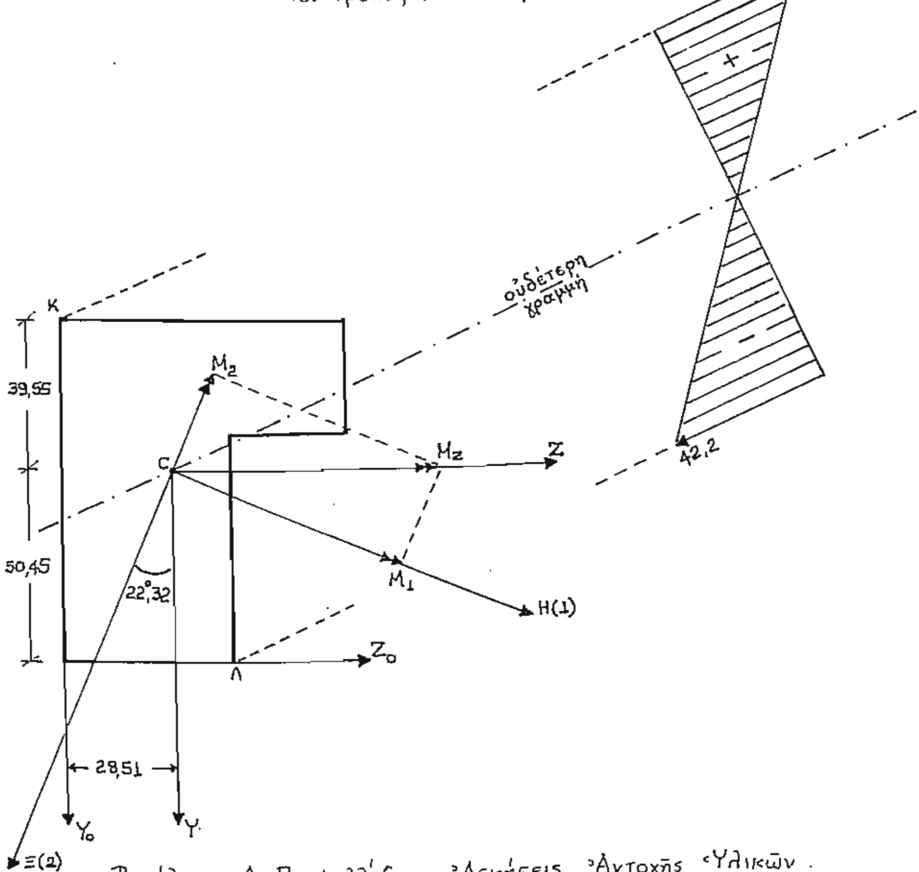


Γιά τή δοκό μέ τά φορτία καί τή διατομή τοῦ σχήματος νά προσδιορισθεῖ ἡ θέση τῆς οὐδέτερης γραμμῆς καί ἡ διανομή τῶν ὀρθῶν τάσεων στή διατομή, ὅπου ἐμφανίζεται ἡ ἐπικίνδυνη καταπόνηση.

Οἱ διαστάσεις τῆς διατομῆς εἶναι σέ cm.

λυση

Ἔχουμε νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα λοξῆς κάμψης. Θά τό λύσουμε μέ δύο τρόπους, πρῶτα στό κύριο σύστημα ἀξόνων τῆς διατομῆς κι ἔπειτα σέ σύστημα κεντροβαρικῶν ἀξόνων. Ἀφήνουμε στόν ἀναγνώστη νά ἐπιλέξει τόν τρόπο, πού θά κρίνει ἁπλούστερο.



Θά βροῦμε πρῶτα τή θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς διατομῆς. Ἔχουμε:

$A = 45\cdot 90 + 30\cdot 30 = 4950 \ cm^2$

$S_{z_0} = 45\cdot 90\cdot(-45) + 30\cdot 30\cdot(-75) = -249.750 \ cm^3$

$S_{y_0} = 45\cdot 90\cdot 22{,}5 + 30\cdot 30\cdot 60 = 145.125 \ cm^3$

$$y_c = \frac{S_{z_0}}{A} = \frac{-249.750}{4950} = -50{,}45 \ cm$$

$$z_c = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{145.125}{4950} = 29{,}32 \ cm$$

Θά βροῦμε τίς ροπές ἀδράνειας ὡς πρός τό κεντροβαρικό σύστημα (Y, Z). Εἶναι:

$$I_{zz} = \frac{45\cdot 90^3}{12} + 45\cdot 90\cdot 5{,}45^2 + \frac{30\cdot 30^3}{12} + 30\cdot 30\cdot 24{,}55^2 = 3.463.977{,}3 \ cm^4$$

$$I_{yy} = \frac{90\cdot 45^3}{12} + 90\cdot 45\cdot(-6{,}82)^2 + \frac{30\cdot 30^3}{12} + 30\cdot 30\cdot 30{,}68^2 = 1.786.448{,}8 \ cm^4$$

$$I_{yz} = 45\cdot 90\cdot 5{,}45\cdot(-6{,}82) + 30\cdot 30\cdot(-24{,}55)\cdot 30{,}68 = -828.409 \ cm^4$$

α. Θά μελετήσουμε τό πρόβλημα στό κύριο σύστημα ἀξόνων.

Ἡ θέση τοῦ κύριου συστήματος ἀδράνειας καθορίζεται ἀπό τή σχέση:

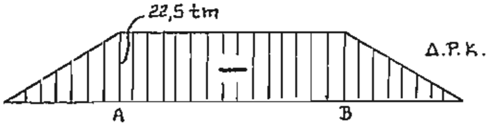
$$\tan 2\phi = \frac{2\cdot I_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}} = \frac{2\cdot(-828.409)}{3.463.977{,}3 - 1.786.448{,}8} = -0{,}99 \Rightarrow \phi = -22^0{,}32$$ καί ἐπειδή

ἡ γωνία ϕ εἶναι ἀρνητική, γιά νά πάρουμε τό κύριο σύστημα, θά στρέψουμε τό σύστημα (Y, Z) δεξιόστροφα κατά γωνία $22^0{,}32$.

Οἱ κύριες ροπές ἀδράνειας εἶναι:

$$I_{1,2} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4\cdot I_{yz}^2}$$ καί μετά τίς ἀντικαταστάσεις:

$I_1 = 3.804.105{,}2 \ cm^4$, $I_2 = 1.446.320{,}8 \ cm^4$.



Ἡ ἐπικίνδυνη καταπόνηση ἐμφανίζεται στή διατομή, γιά τήν ὁποία ἡ καμπτική ροπή εἶναι μέγιστη, δηλαδή στή διατομή γιά τήν ὁποία $M_z = 22{,}5$ tm.

Ἀναλύουμε τήν M_z σέ συνιστῶσες κατά τούς ἄξονες (1) καί (2) τοῦ κύριου συστήματος ἀδράνειας. Εἶναι: $M_1 = M_z\cdot\cos\phi = 20{,}8$ tm , $M_2 = M_z\cdot\sin\phi = 8{,}54$ tm.

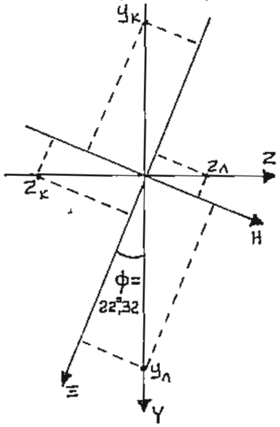
Γιά ἕνα σημεῖο μέ συντεταγμένες η, ξ ὡς πρός τό σύστημα (H, Ξ) ἡ ὀρθή τάση λόγω τῆς M_1 εἶναι $\sigma_{xx}^{M_1} = -\frac{M_1}{I_1}\cdot\xi$, ἡ ὀρθή τάση λόγω τῆς M_2 $\sigma_{xx}^{M_2} = -\frac{M_2}{I_2}\cdot\eta$ καί ἡ συνολική ὀρθή τάση εἶναι: $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{M_1} + \sigma_{xx}^{M_2} = -\frac{M_1}{I_1}\cdot\xi - \frac{M_2}{I_2}\cdot\eta$.

Ἡ ἐξίσωση τῆς οὐδέτερης γραμμῆς εἶναι:

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -\frac{M_1}{I_1}\cdot\xi - \frac{M_2}{I_2}\cdot\eta = 0 \Rightarrow \frac{\xi}{\eta} = -\frac{M_2\cdot I_1}{I_2\cdot M_1} = -\frac{8{,}54\cdot 3.804.105{,}2}{1.446.320{,}8\cdot 20{,}8} \Rightarrow \frac{\xi}{\eta} = -1{,}08 \quad (1)$$

Μέ βάση τήν (1) χαράζουμε τήν οὐδέτερη γραμμή.

Οἱ μέγιστες ὀρθές τάσεις ἐφελκυσμοῦ ἤ θλίψης ἐμφανίζονται στά σημεῖα Κ καί Λ, δηλαδή στά σημεῖα πού ἀπέχουν περισσότερο ἀπό τήν οὐδέτερη γραμμή.



Οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων αὐτῶν ὡς πρός τό σύστημα (Η, Ξ) εἶναι:

$\eta_K = z_K \cdot \cos\phi + y_K \cdot \sin\phi = -29{,}32 \cdot \cos\phi + (-39{,}55) \cdot \sin\phi = -42{,}14 \text{ cm}$

$\xi_K = -z_K \cdot \sin\phi + y_K \cdot \cos\phi = -(-29{,}32) \cdot \sin\phi + (-39{,}55) \cdot \cos\phi = -25{,}45 \text{ cm}$

$\eta_\Lambda = z_\Lambda \cdot \cos\phi + y_\Lambda \cdot \sin\phi = 15{,}68 \cdot \cos\phi + 50{,}45 \cdot \sin\phi = 33{,}7 \text{ cm}$

$\xi_\Lambda = -z_\Lambda \cdot \sin\phi + y_\Lambda \cdot \sin\phi = -15{,}68 \cdot \sin\phi + 50{,}45 \sin\phi = 40{,}7 \text{ cm}.$

Γιά τό σημεῖο Κ ἔχουμε ὀρθή ἐφελκυστική τάση λόγω M_1:

$$\sigma^{M_1}_{xx,K} = \frac{M_1}{I_1} \cdot \xi_K = \frac{20{,}8 \cdot 10^5 \text{ Kp}\cdot\text{cm}}{3.804.105{,}2 \text{ cm}^4} \cdot 25{,}45 \text{ cm} = +13{,}92 \text{ Kp/cm}^2.$$

Ὅμοια καί ἡ $\sigma^{M_2}_{xx,K}$ εἶναι ἐφελκυστική καί

$$\sigma^{M_2}_{xx,K} = \frac{M_2}{I_2} \cdot \eta_K = \frac{8{,}54 \cdot 10^5 \text{ Kp}\cdot\text{cm}}{1.446.320{,}8 \text{ cm}^4} \cdot 42{,}14 \text{ cm} = +24{,}88 \text{ Kp/cm}^2.$$

Ἡ συνολική ὀρθή τάση στό σημεῖο Κ εἶναι: $\sigma_{xx,K} = \sigma^{M_1}_{xx,K} + \sigma^{M_2}_{xx,K} = +38{,}8 \text{ Kp/cm}^2.$

Στό σημεῖο Λ ἔχουμε ὀρθή θλιπτική τάση λόγω M_1:

$$\sigma^{M_1}_{xx,\Lambda} = -\frac{M_1}{I_1} \cdot \xi_\Lambda = -\frac{20{,}8 \cdot 10^5 \text{ Kp}\cdot\text{cm}}{3.804.105{,}2 \text{ cm}^4} \cdot 40{,}7 \text{ cm} = -22{,}25 \text{ Kp/cm}^2.$$

Ἐπίσης λόγω M_2: $\sigma^{M_2}_{xx,\Lambda} = -\dfrac{M_2}{I_2} \cdot \eta_\Lambda = -\dfrac{8{,}54 \cdot 10^5 \text{ Kp}\cdot\text{cm}}{1.446.320{,}8 \text{ cm}^4} \cdot 33{,}7 \text{ cm} = -19{,}9 \text{ Kp/cm}^2.$

Ἡ συνολική ὀρθή τάση στό σημεῖο Λ εἶναι: $\sigma_{xx,\Lambda} = \sigma^{M_1}_{xx,\Lambda} + \sigma^{M_2}_{xx,\Lambda} = -42{,}2 \text{ Kp/cm}^2$

Μέ βάση τίς τιμές τῶν $\sigma_{xx,K}$ καί $\sigma_{xx,\Lambda}$ προσδιορίζουμε τή διανομή τῶν ὀρθῶν τάσεων γιά διατομή, πού καταπονεῖται ἀπό τή μέγιστη ροπή κάμψης $M_z = 22{,}5$ tm.

β. Θά μελετήσουμε τώρα τό πρόβλημα στό κεντροβαρικό σύστημα ἀξόνων (Y, Z). Ἐδῶ δέν χρειάζεται νά βροῦμε τό κύριο σύστημα ἀδράνειας τῆς διατομῆς. Οἱ ὀρθές τάσεις, πού προκαλοῦνται, εἶναι:

$$\sigma_{xx} = \frac{-(M_z \cdot I_{yy} + M_y \cdot I_{yz}) \cdot y + (M_y \cdot I_{zz} + M_z \cdot I_{yz}) \cdot z}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I^2_{yz}}$$

Ἡ καμπτική ροπή, πού καταπονεῖ τή διατομή, ἔχει φορέα τόν ἄξονα Z, ἑπομένως $M_y = 0$. Ἡ ἐπικίνδυνη καταπόνηση ἐμφανίζεται στή διατομή μέ τή μέγιστη M_z, δηλαδή στή διατομή γιά τήν ὁποία $M_z = 22{,}5$ tm

Ἔχουμε λοιπόν: $\sigma_{xx} = \dfrac{-M_z \cdot I_{yy} \cdot y + M_z \cdot I_{yz} \cdot z}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I^2_{yz}}$

Ἡ ἐξίσωση τῆς οὐδέτερης γραμμῆς εἶναι: $\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -I_{yy}\cdot y + I_{yz}\cdot z = 0$

$$\Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{I_{yz}}{I_{yy}} = \frac{-828.409}{1.786.448,8} \Rightarrow \frac{y}{z} = -0,46 \quad (2).$$

Μέ βάση τήν (2) χαράζουμε τήν οὐδέτερη γραμμή.

Οἱ μέγιστες ὀρθές τάσεις ἀναπτύσσονται στά σημεῖα Κ, Λ καί εἶναι*:

$$\sigma_{xx,K} = \frac{-M_z\cdot I_{yy}\cdot y_K + M_z\cdot I_{yz}\cdot z_K}{I_{yy}\cdot I_{zz} - I_{yz}^2} =$$

$$= \frac{-22,5\cdot 10^5\,\text{Kp}\cdot\text{cm}\cdot 1.786.448,8\,\text{cm}^4\cdot(-39,55)\,\text{cm} + 22,5\cdot 10^5\,\text{Kp}\cdot\text{cm}\cdot(-828.409)\,\text{cm}^4\cdot(-29,32)\,\text{cm}}{1.786.448,8\,\text{cm}^4\cdot 3.463.977,3\,\text{cm}^4 - (-828.409\,\text{cm}^4)^2}$$

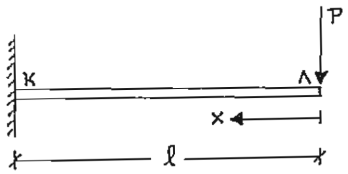
$$\Rightarrow \sigma_{xx,K} = +38,8\ \text{Kp/cm}^2.$$

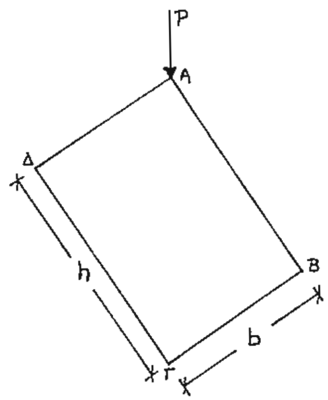
$$\sigma_{xx,\Lambda} = \frac{-M_z\cdot I_{yy}\cdot y_\Lambda + M_z\cdot I_{yz}\cdot z_\Lambda}{I_{yy}\cdot I_{zz} - I_{yz}^2} =$$

$$= \frac{-22,5\cdot 10^5\,\text{Kp}\cdot\text{cm}\cdot 1.786.448,8\,\text{cm}^4\cdot 50,45\,\text{cm} + 22,5\cdot 10^5\,\text{Kp}\cdot\text{cm}\cdot(-828.409)\,\text{cm}^4\cdot 15,68\,\text{cm}}{1.786.448,8\,\text{cm}^4\cdot 3.463.977,3\,\text{cm}^4 - (-828.409\,\text{cm}^4)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx,\Lambda} = -42,2\ \text{Kp/cm}^2.$$

ασκηση 6





Θεωροῦμε τόν πρόβολο τοῦ σχήματος, ὁ ὁποῖος φορτίζεται ἔτσι, ὥστε τό ἐπίπεδο τῆς φόρτισης νά περιέχει τή διαγώνιο τῆς ὀρθογωνικῆς διατομῆς του. Νά βρεθοῦν:

α. ἡ θέση τῆς οὐδέτερης γραμμῆς.
β. οἱ μέγιστες τάσεις ἐφελκυσμοῦ καί θλίψης.

---

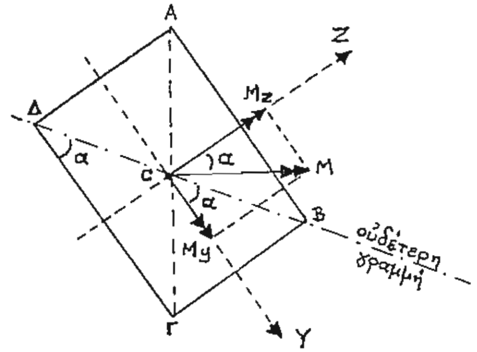
* Στήν ἀπόδειξη τοῦ τύπου 2 τῆς σελίδας 62 ἔχει ληφθεῖ ὑπ'ὄψη ἡ φορά τῶν συνιστωσῶν M_y, M_z τοῦ καμπτικοῦ ζεύγους M, ὅπως αὐτές εἶναι σχεδιασμένες στό σχῆμα τῆς σελίδας 62. Γι'αὐτό, λοιπόν, στήν ἐφαρμογή τοῦ τύπου (2) ἡ τυχοῦσα συνιστῶσα τοῦ καμπτικοῦ ζεύγους (M_y ἤ M_z) θά παίρνεται μέ θετικό πρόσημο, ὅταν κατευθύνεται πρός τίς θετικές συντεταγμένες τοῦ ἀντίστοιχου ἄξονα (Y ἤ Z). Στήν περίπτωσή μας, ἑπομένως, ἡ M_z θά ληφθεῖ μέ θετικό πρόσημο.

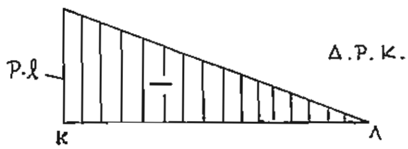
γ. τό βέλος κάμψης στό ἄκρο Β κατά μέγεθος καί διεύθυνση.

δ. γιά ἀριθμητικά δεδομένα $P = 200$ kp, $\ell = 3$ m, $\sigma_{επ.} = 1500$ kp/cm², νά προσδιοριστοῦν οἱ διαστάσεις τῆς διατομῆς, ἄν $\frac{b}{h} = 0{,}5$.

Λύση

α. Θεωροῦμε σύστημα ἀξόνων (Y, Z), ὅπου οἱ ἄξονες Y καί Z εἶναι οἱ ἄξονες συμμετρίας τῆς διατομῆς. Προφανῶς τό σύστημα (Y, Z) εἶναι καί τό κύριο σύστημα τῆς διατομῆς. Ἔχουμε λοιπόν νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα λοξῆς κάμψης σέ διατομή μέ 2 ἄξονες συμμετρίας.





Ἡ καμπτική ροπή M στή θέση x ἀναλύεται σέ 2 συνιστῶσες κατά τούς ἄξονες Y, Z, τίς M_y, M_z ἀντίστοιχα. Ἡ ὀρθή τάση σέ κάποιο σημεῖο τῆς διατομῆς, μέ συντεταγμένες y, z, εἶναι:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_{zz}}\cdot y + \frac{M_y}{I_{yy}}\cdot z \quad (1)$$

ὅπου $I_{zz} = \frac{b\cdot h^3}{12}$, $I_{yy} = \frac{h\cdot b^3}{12}$

$M_z = M\cdot\cos\alpha$, $M_y = M\cdot\sin\alpha$ καί ἡ καμπτική ροπή M στή θέση x εἶναι $P\cdot x$. Ἀντικαθιστώντας, λοιπόν, στήν (1) παίρνουμε:

$$\sigma_{xx} = \frac{12\cdot P\cdot x}{b\cdot h}\cdot\left(\frac{z\cdot\sin\alpha}{b^2} - \frac{y\cdot\cos\alpha}{h^2}\right)$$

Ἡ ἐξίσωση τῆς οὐδέτερης γραμμῆς εἶναι: $\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{z\cdot\sin\alpha}{b^2} - \frac{y\cdot\cos\alpha}{h^2} = 0 \Rightarrow \frac{z}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{b^2}{h^2} = \frac{1}{\tan\alpha}\cdot\tan^2\alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{z}{y} = \tan\alpha$. (2). Ἡ (2) ὅμως εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς διαγωνίου ΒΔ τῆς διατομῆς, ἑπομένως ἡ οὐδέτερη γραμμή συμπίπτει μέ τή διαγώνιο ΒΔ.

β. Οἱ μέγιστες τάσεις ἐφελκυσμοῦ καί θλίψης θά ἐμφανιστοῦν στά σημεῖα, πού ἀπέχουν περισσότερο ἀπό τήν οὐδέτερη γραμμή, δηλαδή στά Α καί Γ.

Ἡ ὀρθή τάση στό Α λόγω τῆς M_z εἶναι: $\sigma^{M_z}_{xx,A} = \frac{M_z}{I_{zz}}\cdot y_A =$

$$= \frac{P\cdot x\cdot\cos\alpha}{\frac{b\cdot h^3}{12}}\cdot\frac{h}{2} = \frac{6\cdot P\cdot x}{b\cdot h^2}\cdot\cos\alpha = \frac{6\cdot P\cdot x}{b\cdot h^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} =$$

$$= \frac{6\cdot P\cdot x}{b\cdot h^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+(b/h)^2}} = \frac{6\cdot P\cdot x}{b\cdot h^2}\sqrt{\frac{h^2}{b^2+h^2}} = \frac{6\cdot P\cdot x}{b\cdot h\sqrt{b^2+h^2}}$$ καί ἐπειδή

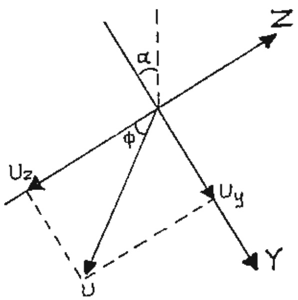
εἶναι ἐφελκυστική, $\sigma^{M_z}_{xx,A} = +\dfrac{6\cdot P\cdot x}{b\cdot h\cdot\sqrt{b^2+h^2}}$. Ὅμοια καί ἡ $\sigma^{M_y}_{xx,A}$ εἶναι ἐφελκυστική καί $\sigma^{M_y}_{xx,A} = \dfrac{M_y}{I_{yy}}\cdot z_A = \dfrac{P\cdot x\cdot \sin\alpha}{\frac{h\cdot b^3}{12}}\cdot\dfrac{b}{2} =$

$$= \frac{6\cdot P\cdot x}{h\cdot b^2}\cdot\sin\alpha = \frac{6\cdot P\cdot x}{h\cdot b^2}\cdot\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{6\cdot P\cdot x}{h\cdot b^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}} = +\frac{6\cdot P\cdot x}{b\cdot h\cdot\sqrt{b^2+h^2}}$$

Ἡ συνολική ὀρθή τάση στό A εἶναι: $\sigma_{xx,A} = \sigma^{M_z}_{xx,A} + \sigma^{M_y}_{xx,A} =$
$= +\dfrac{12\cdot P\cdot x}{b\cdot h\cdot\sqrt{b^2+h^2}}$.

Λόγω συμμετρίας οἱ M_z, M_y θά προκαλέσουν στό Γ ἴδιες κατ' ἀπόλυτη τιμή τάσεις μ' ἐκεῖνες πού προκαλοῦν στό A. Καί ἐπειδή οἱ M_z, M_y προκαλοῦν θλίψη στό Γ θά ἔχουμε $\sigma_{xx,\Gamma} = -\dfrac{12\cdot P\cdot x}{b\cdot h\cdot\sqrt{b^2+h^2}}$.

γ.



Ἀναλύουμε τή δύναμη P σέ συνιστῶσες κατά τούς ἄξονες Y καί Z, τίς P_y, P_z ἀντίστοιχα. Ἡ P_y θά προκαλέσει βέλος κάμψης U_y στήν κατεύθυνση Y, ἐνῶ ἡ P_z προκαλεῖ βέλος κάμψης U_z στήν κατεύθυνση Z. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε τό βέλος κάμψης πακτωμένης δοκοῦ, πού καταπονεῖται ἀπό συγκεντρωμένο φορτίο στό ἐλεύθερό της ἄκρο. Εἶναι: $U_y = \dfrac{P_y\cdot \ell^3}{3\cdot E\cdot I_{zz}}$, ὅπου

E τό μέτρο τοῦ Young, ἑπομένως $U_y = \dfrac{P\cdot\cos\alpha\cdot\ell^3}{3\cdot E\cdot\frac{b\cdot h^3}{12}} = \dfrac{4\cdot P\cdot \ell^3}{E\cdot b\cdot h^3}\cdot\cos\alpha$

$$= \frac{4\cdot P\cdot\ell^3}{E\cdot b\cdot h^3}\cdot\frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} = \frac{4\cdot P\cdot\ell^3}{E\cdot b\cdot h^2\cdot\sqrt{b^2+h^2}}.$$

Ὅμοια προκύπτει ὅτι $U_z = -\dfrac{4\cdot P\cdot\ell^3}{E\cdot b^2\cdot h\cdot\sqrt{b^2+h^2}}$.

Τό συνιστάμενο βέλος κάμψης εἶναι: $U = \sqrt{U_y^2+U_z^2} = \dfrac{4\cdot P\cdot\ell^3}{E\cdot b^2\cdot h^2}$.
Ἡ γωνία φ πού σχηματίζει τό U μέ τόν ἄξονα Z θά προκύψει ἀπό τή σχέση $\tan\phi = \dfrac{U_y}{U_z} \Rightarrow \tan\phi = -\dfrac{b}{h} = -\tan\alpha \Rightarrow \phi = -\alpha$.

δ. Ἡ μέγιστη τάση θά ἐμφανιστεῖ στή θέση K τῆς πάκτωσης καί εἶναι $\sigma_{xx,max.} = \dfrac{12\cdot P\cdot \ell}{b\cdot h\cdot\sqrt{b^2+h^2}}$, καί ἐπειδή $\dfrac{b}{h} = 0{,}5$ εἶναι

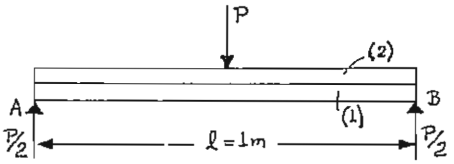
$\sigma_{xx,max.} = \dfrac{12\cdot P\cdot\ell}{b\cdot 2\cdot b\cdot\sqrt{b^2+4b^2}} = \dfrac{2{,}68\cdot P\cdot\ell}{b^3}$. Θά πρέπει:

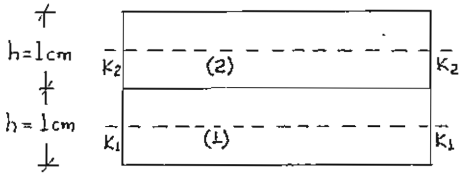
Θά πρέπει: $\sigma_{xx,max.} \leq \sigma_{επ.} \Rightarrow \frac{2{,}68 \cdot P \cdot \ell}{b^3} \leq \sigma_{επ.} \Rightarrow \frac{b^3}{2{,}68 \cdot P \cdot \ell} \geq \frac{1}{\sigma_{επ.}} \Rightarrow$

$\Rightarrow b^3 \geq \frac{2{,}68 \cdot P \cdot \ell}{\sigma_{επ.}} \Rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{2{,}68 \cdot P \cdot \ell}{\sigma_{επ.}}} \Rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{2{,}68 \cdot 200\,kp \cdot 300\,cm}{1500\,kp/cm^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \geq 4{,}75$ cm , ὁπότε $h \geq 9{,}5$ cm.

ασκηση 7





Θεωροῦμε τή σύνθετη δοκό τοῦ σχήματος, πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς δοκούς (1) καί (2). Ἡ δοκός (1) ἀποτελεῖται ἀπό χάλυβα καί ἡ δοκός (2) ἀπό ὀρείχαλκο. Τό σύστημα τῶν 2 δοκῶν στηρίζεται στά σημεῖα A καί B καί φορτίζεται ἀπό μιά δύναμη P στό μέσο τῆς ἀπόστασης AB. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ μέγιστη ἐπιτρεπόμενη τιμή τῆς P: α. στήν περίπτωση, πού οἱ 2 δοκοί δέν συνδέονται μεταξύ τους καί μποροῦν νά παραμορφωθοῦν ἀνεξάρτητα ἡ μιά ἀπ' τήν ἄλλη, β. στήν περίπτωση, πού οἱ 2 δοκοί συνδέονται στερεά σ' ὅλο τό μῆκος τους.

Δίνονται: $AB = \ell = 1\,m$, τό πλάτος τῶν δοκῶν $b = 5$ cm, τό ὕψος τῶν δοκῶν $h = 1$cm, ἡ μέγιστη ἐπιτρεπόμενη ὀρθή τάση τοῦ ὀρείχαλκου. $\sigma_{επ.}^{ορ.} = 75\ MN/m^2$, ἡ μέγιστη ἐπιτρεπόμενη ὀρθή τάση τοῦ χάλυβα $\sigma_{επ.}^{χ.} = 120\ MN/m^2$, τό μέτρο ἐλαστικότητας τοῦ ὀρείχαλκου $E_{ορ.} = 83\ GN/m^2$,

τό μέτρο ἐλαστικότητας τοῦ χάλυβα $E_{χ.} = 210\ GN/m^2$.

λυση

α. Ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας R τῆς δοκοῦ (1) μετά τήν κάμψη εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν ἀκτίνα καμπυλότητας τῆς δοκοῦ (2) μετά τήν κάμψη.

Ἡ τάση, ἑπομένως, σ' ἕνα σημεῖο τῆς δοκοῦ (1), πού ἀπέχει ἀπόσταση y ἀπό τήν οὐδέτερη γραμμή K_1K_1, εἶναι: $\sigma_1 = E_χ \cdot \varepsilon_1 \Rightarrow$ $\sigma_1 = E_χ \cdot \frac{y}{R}$ (1). Γιά σημεῖο τῆς δοκοῦ (2), πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση y ἀπό τήν οὐδέτερη K_2K_2, ἔχουμε ἀντίστοιχα $\sigma_2 = E_{ορ.} \cdot \frac{y}{R}$ (2). Διαιρώντας τίς (1) καί (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_{x.}}{E_{op.}} = \frac{210}{33} = 2,53$.

Υποθέτουμε ότι $\sigma_{1\,max.} = \sigma^{x}_{\varepsilon\pi.} = 120\ MN/m^2$, οπότε θά είναι: $\sigma_{2\,max.} = \frac{120}{2,53}\ MN/m^2 = 47,5\ MN/m^2$. Άν υποθέταμε $\sigma_{2\,max.} = \sigma^{op.}_{\varepsilon\pi.} = 75\ MN/m^2$, θά προέκυπτε $\sigma_{1\,max.} = 75 \cdot 2,53\ MN/m^2 = 189,75\ MN/m^2$, πού είναι έξω από τά όρια αντοχής τοῦ χάλυβα, διότι $\sigma^{x.}_{\varepsilon\pi.} = 120\ MN/m^2$.

Άς είναι, λοιπόν, M_1 ή ροπή κάμψης, πού παραλαμβάνεται από τή δοκό (1) καί ή οποία αντιστοιχεῖ σέ ορθή τάση $\sigma_{1\,max.}$ - Αντίστοιχα M_2 θά είναι ή ροπή κάμψης, πού παραλαμβάνεται από τή δοκό (2) καί ή οποία αντιστοιχεῖ σέ ορθή τάση $\sigma_{2\,max.}$ - Έχουμε, λοιπόν:

$$\sigma_{1\,max.} = \frac{M_1}{I_{zz}} \cdot y_{max.} \Rightarrow M_1 = \frac{\sigma_{1\,max.} \cdot I_{zz}}{y_{max.}} = \frac{\sigma_{1\,max.} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{120 \cdot 10^6\ N/m^2 \cdot \frac{5}{100} m \cdot \left(\frac{1}{100} m\right)^3 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{200}\ m} = 100\ N \cdot m.$$

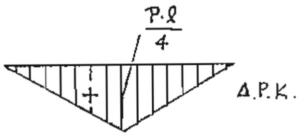
καί

$$\sigma_{2\,max.} = \frac{M_2}{I_{zz}} \cdot y_{max.} \Rightarrow M_2 = \frac{\sigma_{2\,max.} \cdot I_{zz}}{y_{max.}} = \frac{\sigma_{2\,max.} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{47,5 \cdot 10^6\ N/m^2 \cdot \frac{5}{100} m \cdot \left(\frac{1}{100} m\right)^3 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{200}\ m} = 39,58\ N \cdot m.$$

Ή συναλική ροπή, πού παραλαμβάνεται από τήν σύνθετη δοκό, είναι:

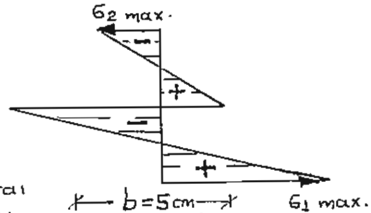
$M = M_1 + M_2 = 139,58\ N \cdot m$.



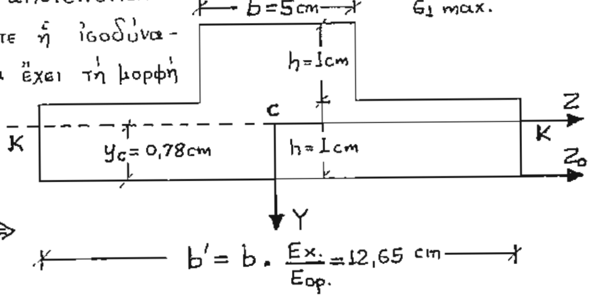
Από τό διάγραμμα τῶν ροπῶν κάμψης βρίσκουμε ότι ή μέγιστη ροπή, πού καταπονεῖ τή σύνθετη δοκό, είναι: $M = \frac{P \cdot \ell}{4}$. Θά έχουμε, λοιπόν, $M = \frac{P \cdot \ell}{4} \Rightarrow 139,58 = \frac{P \cdot 1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow P = 558,32\ N$.

Τό διάγραμμα ορθῶν τάσεων γιά τήν περίπτωση αυτή δίνεται στό διπλανό σχῆμα.



β. Θεωροῦμε ότι ή δοκός αποτελεῖται ολόκληρη από ορείχαλκο. Τότε ή ισοδύναμη διατομή σέ ορείχαλκο θά έχει τή μορφή τοῦ διπλανοῦ σχήματος.



Ή συντεταγμένη y_c τοῦ κέντρου βάρους της είναι:

$$y_c = \frac{S_{z_0}}{A} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 1,5 + 12,65 \cdot 1 \cdot 0,5}{5 \cdot 1 + 12,65 \cdot 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_c = 0,78\ cm$.

Ἡ οὐδέτερη γραμμὴ τῆς ἰσοδύναμης διατομῆς εἶναι ἡ ΚΚ. Ἡ ροπὴ ἀδρανείας I_{zz} εἶναι:

$$I_{zz} = \frac{5\cdot 1^3}{12} + 5\cdot 1\cdot(1{,}5-0{,}78)^2 + \frac{12{,}65\cdot 1^3}{12} + 12{,}65\cdot 0{,}5\cdot(0{,}78-0{,}5)^2 = 4{,}54 \text{ cm}^4.$$

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἔχουμε: $\sigma_{1\,max.} = \frac{E_{x.}}{R}\cdot y_{1\,max.}$ (3)

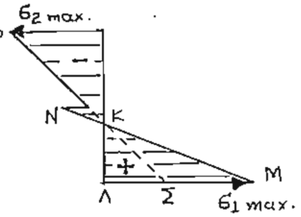
$$\sigma_{2\,max.} = \frac{E_{op.}}{R}\cdot y_{2\,max.} \quad (4)$$

Διαιρώντας κατὰ μέλη τὶς (3) καὶ (4) παίρνουμε:

$$\frac{\sigma_{1\,max.}}{\sigma_{2\,max.}} = \frac{E_{x.}\cdot y_{1\,max.}}{E_{op.}\cdot y_{2\,max.}} = \frac{210\cdot 0{,}78}{83\cdot 1{,}22} \Rightarrow \frac{\sigma_{1\,max.}}{\sigma_{2\,max.}} = 1{,}62 \quad (5)$$

Ὑποθέτουμε ὅτι $\sigma_{1\,max.} = \sigma^{x.}_{επ.} = 120$ MN/m². Τότε ἀπὸ τὴν (5) παίρνουμε $\sigma_{2\,max.} = 74{,}07$ MN/m², ποὺ εἶναι μέσα στὰ ὅρια ἀντοχῆς τοῦ ὀρειχάλκου, γιατὶ $\sigma^{op.}_{επ.} = 75$ MN/m². Ἂν ὑποθέταμε $\sigma_{2\,max.} = \sigma^{op.}_{επ.} = 75$ MN/m², ἡ (5) θὰ ἔδινε $\sigma_{1\,max.} = 121{,}5$ MN/m², ἡ ὁποία εἶναι ἔξω ἀπὸ τὰ ὅρια ἀντοχῆς τοῦ χάλυβα, γιατὶ $\sigma^{x.}_{επ.} = 120$ MN/m².
Εἶναι λοιπὸν $\sigma_{1\,max.} = 120$ MN/m², $\sigma_{2\,max.} = 74{,}07$ MN/m².
Ἡ ροπὴ κάμψης, ποὺ ἀπαιτεῖται γιὰ νὰ ἀναπτυχθοῦν οἱ τάσεις αὐτές, εἶναι: $M = \frac{\sigma_{2\,max.}\cdot I_{zz}}{y_{2\,max.}} = \frac{74\cdot 10^6 \text{ N/m}^2\cdot 4{,}54\cdot(10^{-2}\text{m})^4}{1{,}22\cdot 10^{-2}\text{ m}} = 275{,}64$ N·m.

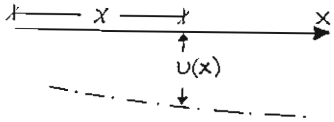
Ἐπειδὴ $M = \frac{P\cdot \ell}{4}$ θὰ εἶναι: $275{,}64 = \frac{P\cdot 1}{4} \Rightarrow P = 1102{,}56$ N.



Γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ διαγράμματος ὀρθῶν τάσεων παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς: Ἐφόσον γνωρίζουμε τὴ $\sigma_{2\,max.}$ τῆς ἰσοδύναμης ὀρειχάλκινης δοκοῦ καὶ τὴ θέση τῆς οὐδέτερης γραμμῆς τῆς ἰσοδύναμης διατομῆς (ἡ ὁποία στὸ διάγραμμα ὀρθῶν τάσεων ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Κ), χαράζουμε τὸ διάγραμμα ὀρθῶν τάσεων ΡΚΣ γιὰ τὴν ἰσοδύναμη διατομή. Βέβαια τὸ διάγραμμα αὐτὸ μόνο ἀπὸ τὴ μέση καὶ πάνω ἀντιπροσωπεύει πραγματικὲς τάσεις (αὐτὲς ποὺ ἀναπτύσσονται στὴν ὀρειχάλκινη δοκό). Δεδομένου ὅμως ὅτι γνωρίζουμε τὴ $\sigma_{1\,max.}$ γιὰ τὴ χαλύβδινη δοκό, παίρνουμε τὸ τμῆμα $ΛΜ = \sigma_{1\,max.}$, ἑνώνουμε τὸ Μ μὲ τὸ Κ, προεκτείνουμε τὸ ΜΚ ἕως τὸ Ν καὶ ἔτσι παίρνουμε τὸ πραγματικὸ διάγραμμα ὀρθῶν τάσεων.

β. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Ἐλαστική γραμμή δοκοῦ εἶναι ἡ καμπύλη, τήν ὁποία σχηματίζει ὁ ἄξονας τῆς δοκοῦ μετά τήν παραμόρφωση.



Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E\cdot I_{zz}} \quad (1)$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν (1) παίρνουμε:

$$E\cdot I_{zz}\cdot \frac{du(x)}{dx} = -\int M(x)\cdot dx + c_1 \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση (2) δίνει τήν κλίση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς στήν τυχοῦσα θέση x.

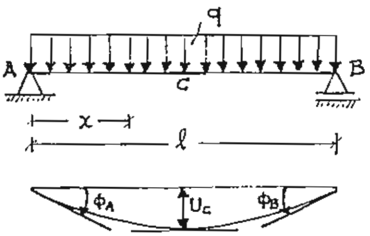
Ὁλοκληρώνοντας τήν (2) παίρνουμε: $E\cdot I_{zz}\cdot u(x) = -\iint M(x)\cdot dx\cdot dx + c_1\cdot x + c_2$ (3). Ἡ ἐξίσωση (3) δίνει τό βέλος κάμψης u στήν τυχοῦσα θέση x. Οἱ σταθερές c_1, c_2 προκύπτουν ἀπό τίς συνθῆκες στήριξης καί συνέχειας τῆς δοκοῦ*.

Ἕνα πρόβλημα ἐλαστικῆς γραμμῆς δοκοῦ μποροῦμε νά τό ἀντιμετωπίσουμε μέ τόν ἑξῆς τρόπο:

i) βρίσκουμε τή ροπή κάμψης $M(x)$ σέ μιά τυχοῦσα θέση x.
ii) ὑπολογίζουμε τό $\iint M(x)\cdot dx\cdot dx$
iii) βρίσκουμε τίς τιμές τῶν σταθερῶν c_1, c_2.

Στήν περίπτωση τῆς λοξῆς κάμψης τό βέλος κάμψης προκύπτει ὡς τό γεωμετρικό ἄθροισμα τῶν ἐπί μέρους βελῶν κάμψης, πού προκαλοῦνται ἀπό τίς 2 συνιστῶσες, στίς ὁποῖες ἀναλύεται ἡ καμπτική ροπή (πρβλ. ἄσκηση 6γ, σελίδα 72)

ασκηση 1



α. Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς γιά ἀμφιέρειστη δοκό μήκους l, πού φορτίζεται μέ ὁμοιόμορφο φορτίο q.

λυση

Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι:

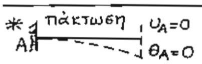
$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E\cdot I_{zz}} \quad (1)$$

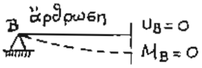
Ἡ καμπτική ροπή στή θέση x εἶναι:

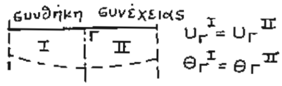
$$M(x) = \frac{q\cdot l}{2}\cdot x - \frac{q\cdot x^2}{2}.$$

Ὁλοκληρώνοντας λοιπόν τήν (1) παίρνουμε:

---

*






$$E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = -\int M(x) \cdot dx \Rightarrow E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = -\int\left(\frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2}\right) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4} + c_1 \quad (2).$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν (2) παίρνουμε:

$$E \cdot I_{zz} \cdot u(x) = \int\left(\frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4} + c_1\right) \cdot dx \Rightarrow E \cdot I_{zz} \cdot u(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12} + c_1 \cdot x + c_2. \quad (3)$$

Γιά $x=0$ εἶναι $u(0)=0$, ἑπομένως ἡ (3) δίνει: $c_2 = 0$.
Γιά $x=l$ εἶναι $u(l)=0$, ἑπομένως ἡ (3) δίνει: $\frac{q \cdot l^4}{24} - \frac{q \cdot l^4}{12} + c_1 \cdot l = 0$
$\Rightarrow c_1 = \frac{q \cdot l^3}{24}$.

Ἡ ἐξίσωση, πού δίνει τά βέλη κάμψης τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς, εἶναι:

$$E \cdot I_{zz} \cdot u(x) = \frac{q \cdot x^4}{24} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24}.$$

Τό μέγιστο βέλος κάμψης τό παίρνουμε γιά $x = \frac{l}{2}$ καί εἶναι:

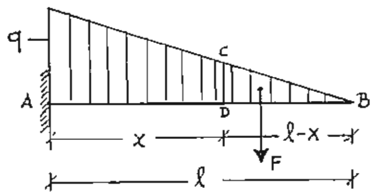
$$y_{max.} = y_C = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_{zz}}.$$

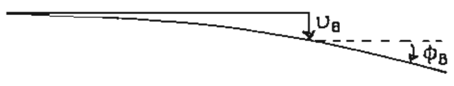
Ἡ ἐξίσωση, πού δίνει τίς κλίσεις τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς, εἶναι:

$$E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = \frac{q \cdot x^3}{6} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4} + \frac{q \cdot l^3}{24}.$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή βρίσκουμε ὅτι στό μέσο C τῆς δοκοῦ ἡ κλίση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι μηδενική, ἐνῶ στά ἄκρα A καί B εἶναι:

$$\phi_A = -\phi_B = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I_{zz}}.$$





β. Γιά τόν **πρόβολο** μέ τήν τριγωνική φόρτιση τοῦ σχήματος νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς.

Λύση

Θά βροῦμε τήν καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό A. Ἡ καμπτική αὐτή ροπή θά προκληθεῖ ἀπό φορτίο τοῦ ὁποίου ἡ ἀριθμητική τιμή ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου CDB καί τό ὁποῖο ἐφαρμόζει στό κέντρο βάρους τοῦ CDB, δηλαδή σέ ἀπόσταση $\frac{l-x}{3}$ ἀπό τό D. Ἔχουμε: $\frac{q}{CD} = \frac{l}{l-x}$

$\Rightarrow CD = \frac{q \cdot (l-x)}{l}$. Ἄς εἶναι F ἡ συνισταμένη δύναμη τῆς τριγωνικῆς φόρτισης στό τρίγωνο CDB. Ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς F εἶναι:

$\frac{1}{2}\cdot CD\cdot DB = \frac{q\cdot(\ell-x)}{\ell}\cdot\frac{\ell-x}{2} = \frac{q\cdot(\ell-x)^2}{2\ell}$. Ἡ καμπτική ροπή, ἑπομένως, στή θέση x εἶναι: $M(x) = -\frac{q\cdot(\ell-x)^2}{2\ell}\cdot\frac{\ell-x}{3} = -\frac{q\cdot(\ell-x)^3}{6\cdot\ell}$.

Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι: $\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E\cdot I_{zz}}$ καί ὁλοκληρώνοντας ἔχουμε: $E\cdot I_{zz}\cdot\frac{du(x)}{dx} = -\int M(x)\cdot dx \Rightarrow E\cdot I_{zz}\cdot\frac{du(x)}{dx} =$

$= \int\frac{q\cdot(\ell-x)^3}{6\cdot\ell}\cdot dx = -\int\frac{q\cdot(\ell-x)^3}{6\cdot\ell}\cdot d(\ell-x) = -\frac{q\cdot(\ell-x)^4}{24\cdot\ell} + c_1$ καί ὁλοκληρώνοντας πάλι παίρνουμε: $E\cdot I_{zz}\cdot u(x) = \int\left(-\frac{q\cdot(\ell-x)^4}{24\cdot\ell} + c_1\right)\cdot dx =$

$= \int\frac{q\cdot(\ell-x)^4}{24\cdot\ell}\cdot d(\ell-x) + c_1\cdot dx =$

$= \frac{q\cdot(\ell-x)^5}{120\cdot\ell} + c_1\cdot x + c_2$. Στή θέση A τῆς πάκτωσης ἡ κλίση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι μηδενική, δηλαδή γιά $x=0$ ἔχουμε $\frac{du(0)}{dx} = 0$, ὁπότε θά εἶναι $c_1 = \frac{q\cdot\ell^3}{24}$. Ἐπίσης στή θέση A τῆς πάκτωσης τό βέλος κάμψης εἶναι μηδενικό, δηλαδή γιά $x=0$ ἔχουμε $u(0)=0$, ὁπότε θά εἶναι $c_2 = -\frac{q\cdot\ell^4}{120}$. Ἡ ἐξίσωση, λοιπόν, πού δίνει τά βέλη κάμψης τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς, εἶναι: $E\cdot I_{zz}\cdot u(x) = \frac{q\cdot(\ell-x)^5}{120\cdot\ell} + \frac{q\cdot\ell^3 x}{24} - \frac{q\cdot\ell^4}{120} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E\cdot I_{zz}\cdot u(x) = \frac{q\cdot(\ell^5 - 5\cdot\ell^4\cdot x + 10\cdot\ell^3\cdot x^2 - 10\cdot\ell^2\cdot x^3 + 5\cdot\ell\cdot x^4 - x^5)}{120\cdot\ell} + \frac{q\cdot\ell^3\cdot x}{24} - \frac{q\cdot\ell^4}{120}$$

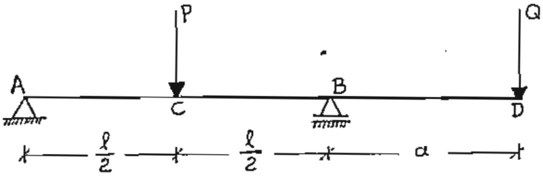
$$\Rightarrow E\cdot I_{zz}\cdot u(x) = \frac{q\cdot\ell^4}{120} - \frac{q\cdot\ell^3\cdot x}{24} + 10\cdot\frac{q\cdot\ell^3\cdot x^2}{120\cdot\ell} - 10\cdot\frac{q\cdot\ell^2\cdot x^3}{120\cdot\ell} + 5\cdot\frac{q\cdot\ell\cdot x^4}{120\cdot\ell} -$$

$$-\frac{q\cdot x^5}{120\cdot\ell} + \frac{q\cdot\ell^3\cdot x}{24} - \frac{q\cdot\ell^4}{120} \Rightarrow E\cdot I_{zz}\cdot u(x) = \frac{q\cdot x^2}{120\cdot\ell}\cdot(10\ell^3 - 10\cdot\ell^2\cdot x + 5\cdot\ell\cdot x^2 - x^3).$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή γιά $x=\ell$ παίρνουμε τό μέγιστο βέλος κάμψης καί εἶναι: $u_{max.} = u_B = \frac{q\cdot\ell^4}{30\cdot E\cdot I_{zz}}$. Ἡ ἐξίσωση, πού δίνει τίς κλίσεις τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς, εἶναι: $E\cdot I_{zz}\cdot\frac{du(x)}{dx} = -\frac{q\cdot(\ell-x)^4}{24\cdot\ell} + \frac{q\cdot\ell^3}{24}$.

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή βρίσκουμε ὅτι στό ἄκρο B ἡ κλίση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι: $\phi_B = \frac{q\cdot\ell^3}{24\cdot E\cdot I_{zz}}$.

άσκηση 2

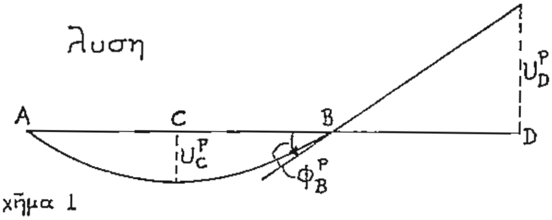


Γιά τή μονοπροέχουσα δοκό τοῦ σχήματος νά βρεθεῖ ὁ λόγος $\frac{P}{Q}$, ὥστε:

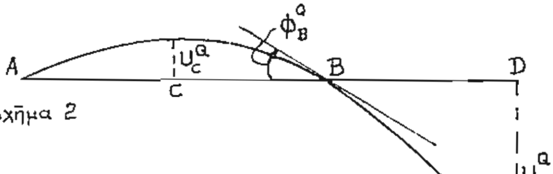
i) νά ἔχουμε μηδενική βύθιση στό C.

ii) νά ἔχουμε μηδενική βύθιση στό D.

λύση

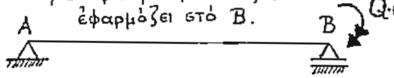


σχῆμα 1



σχῆμα 2

Γιά τό τμῆμα AB τῆς δοκοῦ ἡ φόρτιση Q ἰσοδυναμεῖ μέ ροπή Q·α, πού ἐφαρμόζει στό B.



(i) Ἡ βύθιση στό C θά προκύψει ἀπό τήν ἐπαλληλία τῶν βυθίσεων, πού ὀφείλονται στίς φορτίσεις P καί Q. Ἡ μορφή τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τῆς δοκοῦ λόγω μόνο τοῦ φορτίου P δίνεται στό διπλανό σχῆμα 1. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε τή βύθιση στό μέσο ἀμφιέρειστης δοκοῦ λόγω μοναχικοῦ φορτίου, πού ἐφαρμόζει στό μέσο της. Εἶναι $U_C^P = \dfrac{P\cdot\ell^3}{48\cdot E\cdot I_{zz}}$

Ἡ μορφή τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τῆς δοκοῦ λόγω μόνο τοῦ φορτίου Q δίνεται στό παραπάνω σχῆμα 2. Θέλουμε νά βροῦμε τή βύθιση στό μέσο τῆς δοκοῦ AB λόγω τοῦ φορτίου Q. Ἡ βύθιση αὐτή εἶναι ἴδια μέ τή βύθιση, πού προκαλεῖ καμπτική ροπή Q·α, πού ἐφαρμόζει στό B. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε τή βύθιση στό μέσο ἀμφιέρειστης δοκοῦ λόγω φόρτισης μέ ροπή Q·α στό δεξιά ὑποστήριγμα B. Εἶναι $\overset{Q}{U}(x) = \dfrac{Q\cdot\alpha\cdot x\cdot(x^2-\ell^2)}{6\cdot\ell\cdot E\cdot I_{zz}}$, $0\le x\le \ell$ καί $U_C^Q = -\dfrac{Q\cdot\alpha\cdot\ell^2}{16\cdot E\cdot I_{zz}}$.

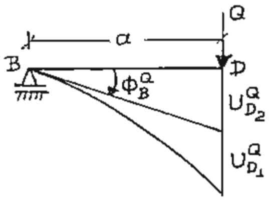
Γιά νά εἶναι μηδενική ἡ βύθιση στό C, θά πρέπει: $U_C^P + U_C^Q = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{P\cdot\ell^3}{48\cdot E\cdot I_{zz}} = \frac{Q\cdot\alpha\cdot\ell^2}{16\cdot E\cdot I_{zz}} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{3\cdot\alpha}{\ell}.$$

(ii) Ἡ βύθιση στό D λόγω μόνο τῆς φόρτισης P εἶναι $U_D^P = \phi_B^P\cdot\alpha = -\dfrac{P\cdot\ell^2\cdot\alpha}{16\cdot E\cdot I_{zz}}$.

Τή βύθιση στό D λόγω μόνο τῆς φόρτισης Q τή βρίσκουμε ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμε ὅτι στό B ἔχουμε πάκτωση. Ἄς εἶναι U_{D1}^Q ἡ βύθιση τοῦ D λόγω τοῦ φορτίου Q, πού ἐφαρμόζει στό ἄκρο τῆς πακτωμένης (ὅπως θεωρήσαμε) δοκοῦ BD. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε τήν βύθιση στό ἄκρο πακτωμένης δοκοῦ λόγω συγκεντρωμένου φορτίου στό ἄκρο της. Εἶναι : $U_{D_1}^{Q} = \dfrac{Q \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot I_{zz}}$.

Ἡ πραγματική ὅμως στήριξη στό B εἶναι **κύλιση** , ἐπιτρέπει συνεπῶς στροφή τῆς δοκοῦ γύρω ἀπό τό B. Συγκεκριμένα λόγω τῆς φόρτισης Q ἡ δοκός θά στραφεῖ γύρω ἀπό τό B κατά γωνία ϕ_B^Q. Γιά νά πάρουμε, ἑπομένως, τήν πραγματική βύθιση τοῦ D λόγω Q θά πρέπει στήν $U_{D_1}^Q$ νά προσθέσουμε καί μιά $U_{D_2}^Q = \phi_B^Q \cdot a$. Ἡ ϕ_B^Q εἶναι ἡ κλίση, πού παρουσιάζει ἡ ἀμφιέρειστη δοκός AB στό ἄκρο της B, ὅταν φορτίζεται μέ καμπτική ροπή $Q \cdot a$ στό ἄκρο B.



Εἶναι: $\phi_B^Q = \dfrac{Q \cdot a \cdot \ell}{3 \cdot E \cdot I_{zz}}$ καί ἑπομένως $U_{D_2}^Q = \phi_B^Q \cdot a = \dfrac{Q \cdot a^2 \cdot \ell}{3 \cdot E \cdot I_{zz}}$.

Ἡ συνολική βύθιση στό D λόγω Q εἶναι: $U_D^Q = U_{D_1}^Q + U_{D_2}^Q =$

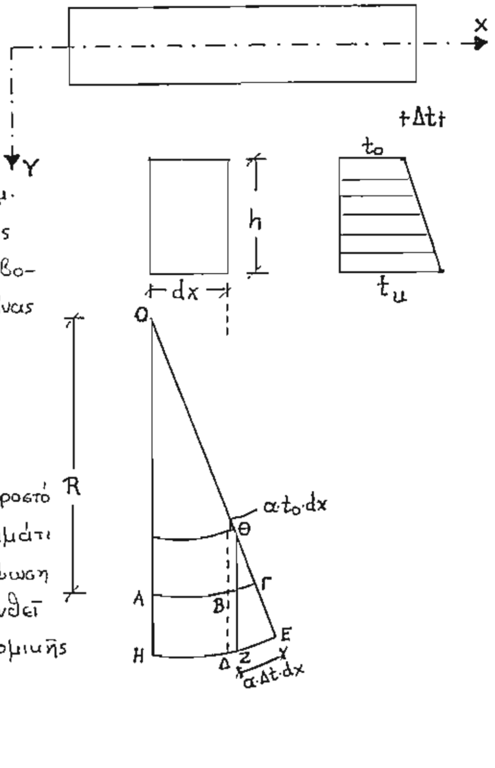
$$= \frac{Q \cdot a^3 + Q \cdot a^2 \cdot \ell}{3 \cdot E \cdot I_{zz}}.$$

Γιά νά εἶναι μηδενική ἡ βύθιση στό D, θά πρέπει : $U_D^P + U_D^Q = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{P \cdot \ell^2 \cdot a}{16 \cdot E \cdot I_{zz}} = \frac{Q \cdot a^3 + Q \cdot a^2 \cdot \ell}{3 \cdot E \cdot I_{zz}} \Rightarrow \frac{P}{Q} = 5{,}33 \cdot \left(\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a}{\ell} \right).$$

ασκηση 3

Νά ἐξετασθεῖ ἡ παραμόρφωση ἀπειροστοῦ στοιχείου καί ἔπειτα νά συναχθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εὐθύγραμμης δοκοῦ, ὅταν αἰτία τῆς παραμόρφωσης εἶναι ἀνομοιόμορφη μεταβολή τῆς θερμοκρασίας πάνω καί κάτω ἶνας κατά $\Delta t = t_u - t_o$.



λυση

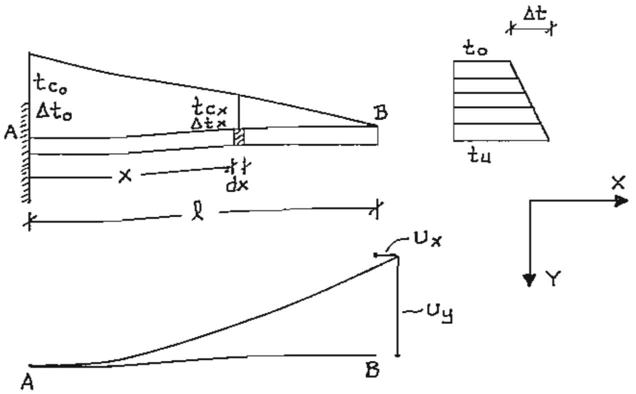
Θεωροῦμε πάνω στή δοκό ἕνα ἀπειροστό κομμάτι μήκους dx. Σχεδιάζουμε τό κομμάτι αὐτό, ὅπως θά εἶναι μετά τήν παραμόρφωση τῆς δοκοῦ. Ἡ πάνω ἶνα του θά ἐπιμηκυνθεῖ κατά $a \cdot t_o \cdot dx$, ὅπου a ὁ συντελεστής θερμικῆς διαστολῆς τῆς δοκοῦ. Ἡ κάτω ἶνα αὐτοῦ τοῦ κομματιοῦ θά ἐπιμηκυνθεῖ κατά $\Delta E = \alpha \cdot t_u \cdot dx$.

Ἄς εἶναι R ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας τοῦ οὐδέτερου ἄξονα μετά τήν παραμόρφωση. Ἔχουμε : $ZE = \Delta E - \Delta Z = \alpha \cdot t_u \cdot dx - \alpha \cdot t_o \cdot dx = \alpha \cdot dx \cdot (t_u - t_o) = \alpha \cdot dx \cdot \Delta t$. Τά "τρίγωνα" $O\hat{A}B$, $\Theta\hat{Z}E$ εἶναι κατά προσέγγιση ὅμοια. Ἀπό τά "τρίγωνα" αὐτά παίρνουμε $\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{ZE}{\Theta Z} \Rightarrow \dfrac{dx}{R} = \dfrac{\alpha \cdot \Delta t \cdot dx}{h} \Rightarrow \dfrac{1}{R} = \dfrac{\alpha \cdot \Delta t}{h}$ (1).

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι $\dfrac{1}{R} = -\dfrac{d^2 u}{dx^2}$ (2), ὅπου u οἱ βυθίσεις τοῦ οὐδέτερου ἄξονα στήν κατεύθυνση Y. Ἀπό τίς (1) καί (2) παίρνουμε ὅτι : $\dfrac{d^2 u}{dx^2} = -\dfrac{\alpha \cdot \Delta t}{h}$.

ασκηση 4

Θεωροῦμε τόν πρόβολο τοῦ σχήματος, ὁ ὁποῖος θερμαίνεται κατά τό ἕνα ἄκρο του μέ θερμοκρασία t_{c_o} γιά τή μέση γραμμή καί διαφορά θερμοκρασίας πάνω καί κάτω ἴνας Δt_o. Ἄν ἡ μεταβολή θερμοκρασίας κατά μῆκος τοῦ προβόλου εἶναι γραμμική μέ μηδενική τιμή στό ἄκρο B, νά βρεθοῦν ἡ ὁριζόντια καί ἡ κατακόρυφη μετατόπιση τοῦ B.



λυση

Θεωροῦμε ἕνα ἀπειροστό κομμάτι τοῦ προβόλου μήκους dx σέ ἀπόσταση x ἀπό τό A. Ἡ μέση γραμμή αὐτοῦ θά ἐπιμηκυνθεῖ στή διεύθυνση τοῦ ἄξονα X κατά μῆκος $du_x = \alpha \cdot t_{c_x} \cdot dx$, ὅπου α ὁ συντελεστής θερμικῆς διαστολῆς τοῦ προβόλου, t_{c_x} ἡ θερμοκρασία τῆς μέσης γραμμῆς στή θέση x. Εἶναι $\dfrac{t_{c_o}}{t_{c_x}} = \dfrac{\ell}{\ell - x} \Rightarrow t_{c_x} = \dfrac{t_{c_o} \cdot (\ell - x)}{\ell}$,

ἑπομένως $du_x = \alpha \cdot t_{c_o} \cdot \dfrac{\ell - x}{\ell} \cdot dx$ καί $u_x = \displaystyle\int_0^{\ell} \alpha \cdot t_{c_o} \cdot \frac{\ell - x}{\ell} \cdot dx = \alpha \cdot t_{c_o} \cdot \left[x - \frac{x^2}{2\ell}\right]_0^{\ell} = \frac{\alpha \cdot t_{c_o} \cdot \ell}{2}$.

Ἄς εἶναι du_y ἡ ἐπιμήκυνση κατά τόν ἄξονα Y τοῦ στοιχειώδους κομματιοῦ, πού θεωρήσαμε προηγουμένως. Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἄσκηση θά εἶναι: $\dfrac{d^2 u_y}{dx^2} = -\dfrac{\alpha\cdot\Delta t_x}{h}$, ὅπου h τό ὕψος τοῦ προβόλου. Εἶναι:

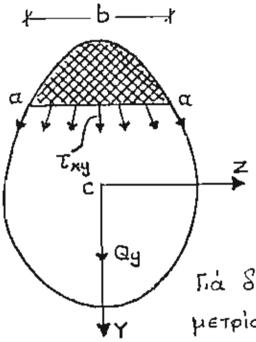
$\dfrac{\Delta t_o}{\Delta t_x} = \dfrac{\ell}{\ell - x} \Rightarrow \Delta t_x = \dfrac{\Delta t_o\cdot(\ell-x)}{\ell}$ καί ἐπομένως $\dfrac{d^2 u_y}{dx^2} = -\dfrac{\alpha\cdot\Delta t_o\cdot(\ell-x)}{h\cdot\ell}$.

Ὁλοκληρώνοντας τή σχέση αὐτή 2 φορές παίρνουμε:

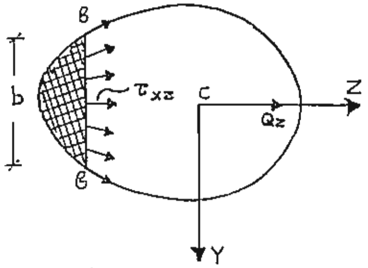
$$u_y = -\frac{\alpha\cdot\Delta t_o}{h}\cdot\left[x^2 - \frac{x^3}{6\cdot\ell}\right]_0^{\ell} = -\frac{\alpha\cdot\Delta t_o\cdot\ell^2}{3\cdot h}$$

γ. ΔΙΑΤΜΗΣΗ

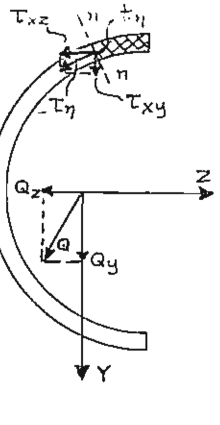
Θά ἀσχοληθοῦμε μέ προβλήματα διάτμησης πλήρων διατομῶν, οἱ ὁποῖες παρουσιάζουν ἄξονα συμμετρίας, παράλληλα πρός τόν ὁποῖο δρᾶ ἡ ἐξωτερική φόρτιση Q.



Γιά διατομή μέ ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα Y καί μέ ἐξωτερική φόρτιση, τῆς ὁποίας ὁ φορέας συμπίπτει μέ τόν ἄξονα Y, οἱ διατμητικές τάσεις τ_{xy} στήν τομή αα δίνονται ἀπό τόν τύπο: $\tau_{xy} = \dfrac{Q_y\cdot S_z}{I_{zz}\cdot b}$, ὅπου S_z ἡ στατική ροπή τοῦ σκιαγραφημένου τμήματος ὡς πρός τόν ἄξονα Z.

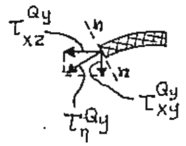


Γιά διατομή μέ ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα Z καί μέ ἐξωτερική φόρτιση, τῆς ὁποίας ὁ φορέας συμπίπτει μέ τόν ἄξονα Z, οἱ διατμητικές τάσεις τ_{xz} στήν τομή ββ δίνονται ἀπό τόν τύπο: $\tau_{xz} = \dfrac{Q_z\cdot S_y}{I_{yy}\cdot b}$, ὅπου S_y ἡ στατική ροπή τοῦ σκιαγραφημένου τμήματος ὡς πρός τόν ἄξονα Y.

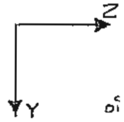


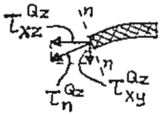
Γιά λεπτότοιχες ἀνοιχτές διατομές μποροῦμε νά βροῦμε τή διανομή τῶν διατμητικῶν τάσεων γιά τυχοῦσα μορφή τῆς διατομῆς καί γιά τυχοῦσα ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη. Ἀκολουθοῦμε τήν ἑξῆς πορεία. Βρίσκουμε τό κύριο σύστημα ἀδράνειας (Y, Z) τῆς διατομῆς. Ἀναλύουμε τήν ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη Q σέ συνιστῶσες Q_y, Q_z κατά τούς κύριους ἄξονες Y, Z ἀντίστοιχα. Βρίσκουμε τή διανομή τῶν διατμητικῶν τάσεων λόγω τῆς καθεμιᾶς συνιστώσας Q_y, Q_z ξεχωριστά. Ἔστω π.χ. ἡ διατομή τοῦ σχήματος.

Βρίσκουμε τὸ κύριο σύστημα ἀδράνειας. Ἀναλύουμε τὴν ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη Q σὲ συνιστῶσες Q_y, Q_z. Στὴν τομή ηη οἱ διατμητικές τάσεις λόγω τῆς Q_y εἶναι: $\tau_\eta^{Q_y} = \dfrac{Q_y \cdot S_z}{I_{zz} \cdot t_\eta}$, ὅπου S_z ἡ στατική ροπή τοῦ σκιαγραφημένου τμήματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Z. Ἡ $\tau_\eta^{Q_y}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν $\tau_{xy}^{Q_y}$ καὶ $\tau_{xz}^{Q_y}$,

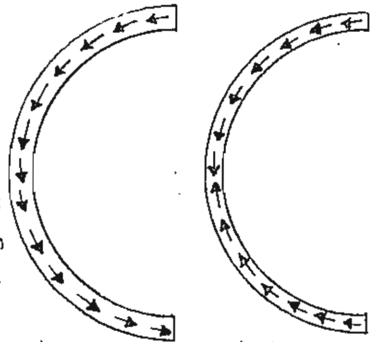


οἱ διατμητικές τάσεις ποὺ προκαλεῖ στὴν τομή ηη ἡ συνιστῶσα Q_y.





οἱ διατμητικές τάσεις ποὺ προκαλεῖ στὴν τομή ηη ἡ συνιστῶσα Q_z.



ροή διατμητικῶν τάσεων τ^{Q_y} ροή διατμητικῶν τάσεων τ^{Q_z}

δηλαδή: $\tau_\eta^{Q_y} = \sqrt{\left(\tau_{xy}^{Q_y}\right)^2 + \left(\tau_{xz}^{Q_y}\right)^2}$

Ἀντίστοιχα οἱ διατμητικές τάσεις λόγω τῆς Q_z εἶναι $\tau_\eta^{Q_z} = \dfrac{Q_z \cdot S_y}{I_{yy} \cdot t_\eta}$ ὅπου S_y ἡ στατική ροπή τοῦ σκιαγραφημένου τμήματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Y, καὶ $\tau_\eta^{Q_z} = \sqrt{\left(\tau_{xy}^{Q_z}\right)^2 + \left(\tau_{xz}^{Q_z}\right)^2}$.

Ἡ συνολική διατμητική τάση τ_η στὴν τομή ηη εἶναι ἴση μὲ τὸ ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν $\tau_\eta^{Q_y}$ καὶ $\tau_\eta^{Q_z}$, ὅπου στὴν ἀλγεβρική αὐτή ἄθροιση λαμβάνεται ὑπ' ὄψη ἡ φορά καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς $\tau_\eta^{Q_y}$ καὶ $\tau_\eta^{Q_z}$.

Γιὰ λεπτότοιχες κλειστές διατομές μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴ διανομή τῶν διατμητικῶν τάσεων, μόνο ἐφόσον ἡ διατομή παρουσιάζει ἄξονα συμμετρίας, παράλληλα πρὸς τὸν ὁποῖο δρᾶ ἡ ἐξωτερική φόρτιση (πρβλ. ἄσκηση 4, σελίδα 89).

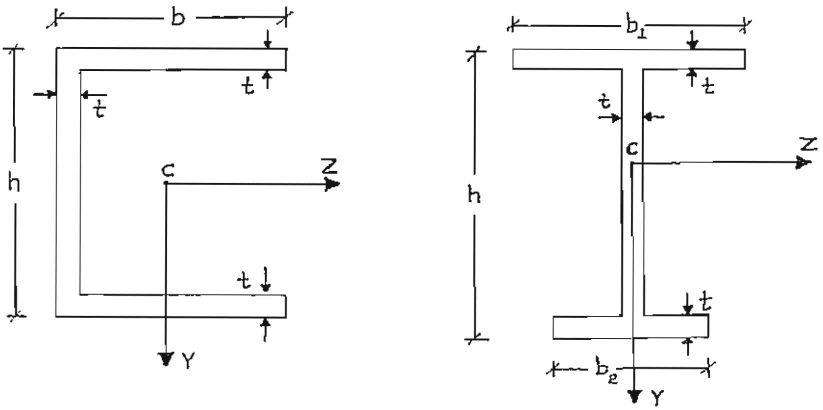
Θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο $\tau = \dfrac{Q \cdot S}{I \cdot t}$ στὶς ἀσκήσεις χωρὶς πρόσημο.

Θὰ σχεδιάζουμε ὅμως πάνω στὴ διατομή τὴ ροή τῶν διατμητικῶν τάσεων. Προσέχουμε ἡ ροή αὐτή νὰ εἶναι τέτοια, ὥστε ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν διατμητικῶν τάσεων νὰ δίνει τὴν ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη.

Ἡ συνισταμένη δύναμη, ποὺ προκύπτει, ἂν συνθέσουμε τὶς διατμητικές τάσεις, περνᾶ ἀπὸ ἕνα καθορισμένο γεωμετρικὸ σημεῖο τῆς διατομῆς, ποὺ λέγεται κ έ ν τ ρ ο δ ι ά τ μ η σ η ς. Ἂν ἡ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη δὲν περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο διάτμησης (ἀλλὰ π.χ., περνᾶ ἀπὸ τό κέντρο βάρους, πού γενικά δέν συμπίπτει μέ τό κέντρο διάτμησης), τότε ή διατομή καταπονεῖται ἀπό μιά πρόσθετη ροπή στρέψης, ή ὁποία προέρχεται ἀπό τή μεταφορά τῆς τέμνουσας δύναμης στό κέντρο διάτμησης.

Τή θέση τοῦ κέντρου διάτμησης τή βρίσκουμε ὡς ἑξῆς. Θεωροῦμε ὅτι ή ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη ἐφαρμόζει στό κέντρο διάτμησης καί ἐξισώνουμε τή ροπή της ὡς πρός ἕνα σημεῖο Ο μέ τή ροπή τῆς συνισταμένης δύναμης τῶν διατμητικῶν τάσεων ὡς πρός τό ἴδιο σημεῖο Ο. Ἔτσι βρίσκουμε τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου διάτμησης ἀπό τό Ο. Ἄν ὑπάρχει ἄξονας συμμετρίας, τό κέντρο διάτμησης θά βρίσκεται πάνω σ' αὐτόν, ὁπότε θεωροῦμε διάτμηση μέ διεύθυνση διατμητικῆς δύναμης κάθετη πρός τόν ἄξονα συμμετρίας. Ἐκεῖ, ὅπου ή συνισταμένη δύναμη τῶν διατμητικῶν τάσεων τέμνει τόν ἄξονα συμμετρίας, εἶναι τό κέντρο διάτμησης. Ἄν ἔχουμε διατομή, ή ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό εὐθύγραμμους κλάδους πού συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο, τότε τό σημεῖο αὐτό εἶναι τό κέντρο διάτμησης τῆς διατομῆς. Τέλος στή συνηθισμένη περίπτωση, πού ή διατομή ἀποτελεῖται ἀπό εὐθύγραμμους κλάδους, οἱ ὁποῖοι δέν συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο, ή συνισταμένη δύναμη τῶν διατμητικῶν τάσεων κάθε κλάδου δίνεται ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ διαγράμματος διατμητικῶν τάσεων κατά μῆκος τοῦ κλάδου.

ασκηση 1.

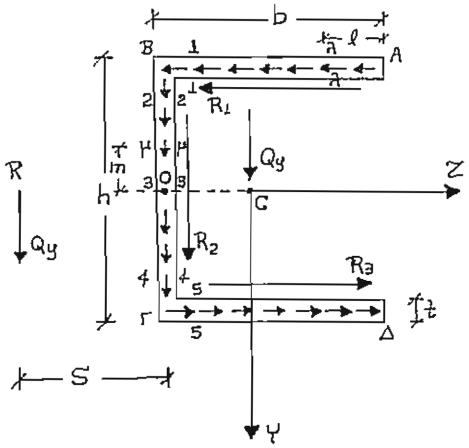


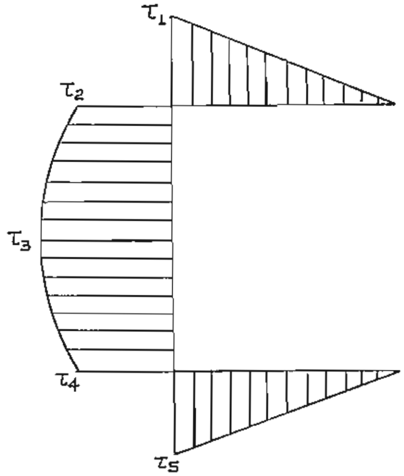
Γιά τίς λεπτόπαχες διατομές τῶν σχημάτων σταθεροῦ πάχους t, οἱ ὁποῖες φορτίζονται μέ τέμνουσα δύναμη Q, τῆς ὁποίας ὁ φορέας συμπίπτει μέ τόν ἄξονα Y:

α. νά βρεθοῦν οἱ διατμητικές τάσεις κατά μῆκος τῶν ἀξόνων τῶν κλάδων. Νά σχεδιαστοῦν τά διαγράμματα διατμητικῶν τάσεων καί νά σημειωθεῖ ή ροή τῶν τάσεων.

β. νά βρεθεῖ ή θέση τοῦ κέντρου διάτμησης γιά κάθε διατομή.

λυση





Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Z εἶναι: $I_{zz} =$
$= \frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \left[-\left(\frac{h}{2} - t\right)\right]^2 + \frac{t \cdot (h-2t)^3}{12} + \frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)^2 = 2 \cdot \frac{b \cdot t^3}{12} + 2 \cdot b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)^2 + \frac{t \cdot (h-2t)^3}{12}$.

Θά βροῦμε τίς διατμητικές τάσεις στίς χαρακτηριστικές θέσεις τῆς διατομῆς 11, 22, 33, 44, 55. Ἡ στατική ροπή στή θέση 11 εἶναι: $S_{11} = b \cdot t \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)$. Εἶναι ἐπίσης $S_{11} = S_{22} = -S_{44} = -S_{55}$. Ἡ στατική ροπή στή θέση 33 εἶναι: $S_{33} =$
$= b \cdot t \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \cdot t \cdot \left(-\frac{h}{4}\right) = -\frac{t \cdot h}{2} \cdot \left(b + \frac{h}{4}\right)$.

Ἡ διατμητική τάση στή θέση 11 εἶναι: $\tau_1 = \frac{Q_y \cdot S_{11}}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot \frac{b \cdot t \cdot h}{2}}{I_{zz} \cdot t} =$
$= \frac{Q_y \cdot b \cdot h}{2 \cdot I_{zz}}$, ὅπου χρησιμοποιήσαμε τόν τύπο τῶν διατμητικῶν τάσεων, χωρίς νά λάβουμε ὑπ' ὄψη τά πρόσημα τῶν ὅρων, πού ὑπεισέρχονται σ' αὐτόν. Ἔτσι, λοιπόν, ἐπειδή οἱ στατικές ροπές στίς θέσεις 11, 22, 44, 55 εἶναι κατ' ἀπόλυτη τιμή ἴσες, θά ἔχουμε: $\tau_1 = \tau_2 = \tau_4 = \tau_5$.

Ἡ διατμητική τάση στή θέση 33 εἶναι: $\tau_3 = \frac{Q_y \cdot S_{33}}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot \frac{t \cdot h}{2} \cdot \left(b + \frac{h}{4}\right)}{I_{zz} \cdot t} =$
$= \frac{Q_y \cdot h}{I_{zz} \cdot 2} \cdot \left(b + \frac{h}{4}\right)$.

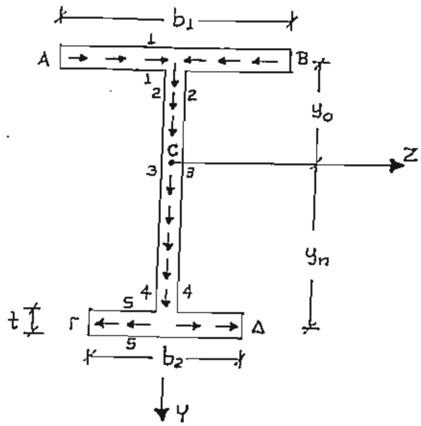
Γιά τήν κατασκευή τοῦ διαγράμματος διατμητικῶν τάσεων παρατηροῦμε τά ἑξῆς. Γιά τούς κλάδους AB καί ΓΔ ἡ κλείουσα τοῦ διαγράμματος θά εἶναι εὐθεία. Διότι στήν τυχοῦσα θέση λλ αὐτῶν τῶν κλάδων, ἡ στατική ροπή θά εἶναι συνάρτηση πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός τήν ἀπόσταση ἀπό τόν ἄξονα Z $\left[S_{\lambda\lambda} = l \cdot t \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)\right]$. Γιά τόν κλάδο ὅμως ΒΓ ἡ κλείουσα τοῦ διαγράμματος εἶναι καμπύλη. Διότι στήν τυχοῦσα θέση μμ αὐτοῦ τοῦ κλάδου ἡ στατική ροπή εἶναι συνάρτηση δεύτερου βαθμοῦ ὡς πρός τήν ἀπόσταση ἀπό τόν ἄξονα Z :

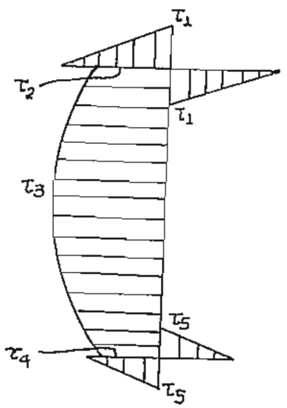
$$S_{\mu\mu} = \left[b \cdot t \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{h}{2} - m\right) \cdot t \cdot \left(\frac{h/2 - m}{2}\right) \right] .$$

Θά βροῦμε τή θέση τοῦ κέντρου διάτμησης. Ἄς εἶναι R_1 ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν διατμητικῶν τάσεων στόν κλάδο AB, R_2 στόν κλάδο BΓ, R_3 στόν κλάδο ΓΔ. Θεωροῦμε ὅτι ἡ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη Q_y ἐφαρμόζει στό κέντρο διάτμησης. Ἄς εἶναι S ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου διάτμησης ἀπό τό σημεῖο O. Ἡ ροπή τῆς Q_y ὡς πρός τό O θά ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν R_1, R_2, R_3 ὡς πρός τό O. Ἡ δύναμη R_2 περνᾶ ἀπό τό O, ἐπομένως δέν δίνει ροπή ὡς πρός αὐτό. Εἶναι: $R_1 = \dfrac{\tau_1 \cdot t \cdot b}{2} = \dfrac{Q_y \cdot b^2 \cdot h \cdot t}{4 \cdot I_{zz}} = R_3$.

Θά ἔχουμε λοιπόν: $Q_y \cdot S = R_1 \cdot \dfrac{h}{2} + R_3 \cdot \dfrac{h}{2} \Rightarrow Q_y \cdot S = Q_y \cdot \dfrac{b^2 \cdot h^2 \cdot t}{4 \cdot I_{zz}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{b^2 \cdot h^2 \cdot t}{4 \cdot I_{zz}} .$$





Ἡ ροπή ἀδράνειας ὡς πρός τόν ἄξονα Z εἶναι:

$$I_{zz} = \frac{b_1 \cdot t^3}{12} + b_1 \cdot t \cdot (-y_0)^2 + \frac{b_2 \cdot t^3}{12} + b_2 \cdot t \cdot y_n^2 + \frac{t \cdot h^3}{12} + t \cdot h \cdot \left(y_n - \frac{h}{2}\right)^2 .$$

Θά βροῦμε τίς διατμητικές τάσεις στίς χαρακτηριστικές 11, 22, 33, 44, 55. Εἶναι: $S_{11} = \dfrac{b_1}{2} \cdot t \cdot (-y_0)$, $S_{22} = b_1 \cdot t \cdot (-y_0)$, $S_3 = b_1 \cdot t \cdot (-y_0) + y_0 \cdot t \cdot \left(-\dfrac{y_0}{2}\right)$, $S_{44} = b_2 \cdot t \cdot y_n$, $S_{55} = \dfrac{b_2}{2} \cdot t \cdot y_n$, καί ἐπομένως: $\tau_1 = \dfrac{Q_y \cdot S_{11}}{I_{zz} \cdot t} =$

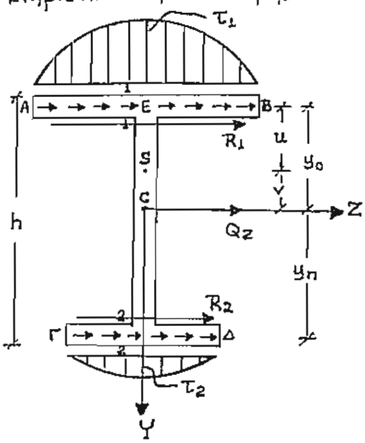
$$= \frac{Q_y \cdot \dfrac{b_1 \cdot t \cdot y_0}{2}}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot b_1 \cdot y_0}{2 \cdot I_{zz}} , \quad \tau_2 = \frac{Q_y \cdot S_{22}}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot b_1 \cdot t \cdot y_0}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot b_1 \cdot y_0}{I_{zz}} ,$$

$$\tau_3 = \frac{Q_y \cdot S_{33}}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot \left[b_1 \cdot t \cdot y_0 + y_0 \cdot t \cdot \frac{y_0}{2} \right]}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot y_0}{I_{zz}} \cdot \left(b_1 + \frac{y_0}{2}\right) , \quad \tau_4 = \frac{Q_y \cdot S_{44}}{I_{zz} \cdot t} =$$

$$= \frac{Q_y \cdot b_2 \cdot t \cdot y_n}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot b_2 \cdot y_n}{I_{zz}} , \quad \tau_5 = \frac{Q_y \cdot S_{55}}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot \dfrac{b_2 \cdot t \cdot y_n}{2}}{I_{zz} \cdot t} = \frac{Q_y \cdot b_2 \cdot y_n}{2 \cdot I_{zz}} .$$

Κατά τή σχεδίαση τῆς ροῆς τῶν διατμητικῶν τάσεων προσέχουμε, ὥστε ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν διατμητικῶν τάσεων νά δίνει τήν ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη, πού δρᾶ κατά τόν ἄξονα Υ.

Θά βροῦμε τή θέση τοῦ κέντρου διάτμησης. Ἐπειδή ἡ διατομή ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα Υ, τό κέντρο διάτμησης θά βρίσκεται πάνω σ' αὐτόν. Θά πρέπει, λοιπόν, νά θεωρήσουμε διάτμηση μέ διεύθυνση διατμητικῆς δύναμης κάθετη πρός τόν ἄξονα Υ, διότι θεωρώντας διάτμηση κατά τόν ἄξονα Υ τό μόνο πού ἐξασφαλίζουμε εἶναι ὅτι τό κέντρο διάτμησης θά βρίσκεται πάνω σ' αὐτόν. Ἄλλωστε τό κέντρο διάτμησης εἶναι ἕνα γεωμετρικό χαρακτηριστικό τῆς διατομῆς.



Θεωροῦμε, λοιπόν, ὅτι ἡ διατομή καταπονεῖται μέ δύναμη Q_z. Οἱ διατμητικές τάσεις λόγω Q_z εἶναι: $\tau = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_{yy} \cdot t}$, ὅπου ἡ ροπή ἀδράνειας I_{yy} εἶναι:

$$I_{yy} = \frac{b_1^3 \cdot t}{12} + \frac{b_2^3 \cdot t}{12} + \frac{t^3 \cdot (h - 2 \cdot t)}{12} .$$

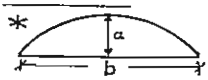
Ἡ στατική ροπή S_y εἶναι μηδενική στίς θέσεις Α, Β, Γ, Δ καί σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ κορμοῦ τῆς διατομῆς. Ἑπομένως μηδενική εἶναι καί ἡ διατμητική τάση σ' ὅλες αὐτές τίς θέσεις. Στίς θέσεις 11 καί 22 ἔχουμε: $S_{11} = \frac{b_1}{2} \cdot t \cdot \left(-\frac{b_1}{4}\right) = -\frac{b_1^2 \cdot t}{8}$,

$S_{22} = \frac{b_2}{2} \cdot t \cdot \left(-\frac{b_2}{4}\right) = -\frac{b_2^2 \cdot t}{8}$, ὁπότε: $\tau_1 = \frac{Q_z \cdot S_{11}}{I_{yy} \cdot t} = \frac{Q_z \cdot \frac{b_1^2 \cdot t}{8}}{I_{yy} \cdot t} = \frac{Q_z \cdot b_1^2}{8 \cdot I_{yy}}$,

$\tau_2 = \frac{Q_z \cdot S_{22}}{I_{yy} \cdot t} = \frac{Q_z \cdot \frac{b_2^2 \cdot t}{8}}{I_{yy} \cdot t} = \frac{Q_z \cdot b_2^2}{8 \cdot I_{yy}}$.

Μέ βάση τίς τιμές αὐτές σχεδιάζουμε γιά τά πέλματα ΑΒ καί ΓΔ τή ροή τῶν διατμητικῶν τάσεων (πού πρέπει νά εἶναι τέτοια, ὥστε ἡ συνισταμένη δύναμη τῶν διατμητικῶν τάσεων νά δίνει τήν ἐξωτερική τέμνουσα Q_z) καί χαράζουμε τά διαγράμματα διατμητικῶν τάσεων (τῶν ὁποίων οἱ κλείουσες εἶναι παραβολές). Ἡ συνισταμένη δύναμη R_1 τῶν διατμητικῶν τάσεων γιά τό πέλμα ΑΒ δίνεται ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ διαγράμματος διατμητικῶν τάσεων κατά μῆκος αὐτοῦ τοῦ πέλματος,* ἄρα: $R_1 = \frac{2}{3} \cdot b_1 \cdot \tau_1 \cdot t = \frac{Q_z \cdot b_1^3 \cdot t}{12 \cdot I_{yy}}$. Ὅμοια προκύπτει: $R_2 = \frac{Q_z \cdot b_2^3 \cdot t}{12 \cdot I_{yy}}$.

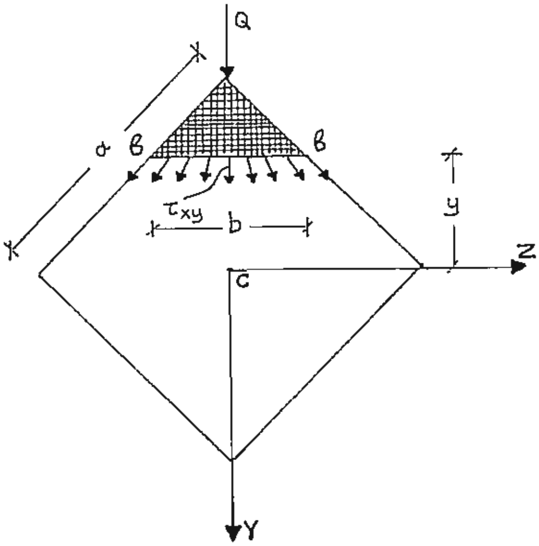
Ἄς εἶναι S ἡ θέση τοῦ κέντρου διάτμησης. Θεωροῦμε ὅτι ἡ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη Q_z ἐφαρμόζει στό S. Παίρνοντας ροπές ὡς πρός Ε ἔχουμε: $Q_z \cdot u = R_2 \cdot h \Rightarrow Q_z \cdot u = \frac{Q_z \cdot b_2^3 \cdot h \cdot t}{12 \cdot I_{yy}} \Rightarrow u = \frac{b_2^3 \cdot h \cdot t}{12 \cdot I_{yy}}$, ὁπότε: $v = y_o - u = y_o - \frac{b_2^3 \cdot h \cdot t}{12 \cdot I_{yy}}$.

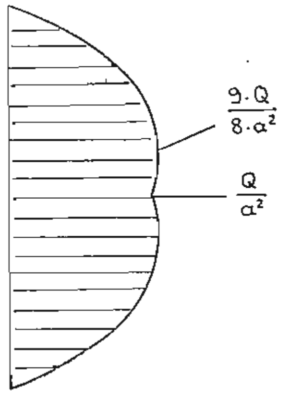
* 

Ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολῆς εἶναι $E = \frac{2}{3} \cdot a \cdot b$

ασκηση 2

Θεωροῦμε δοκό τετραγωνικῆς διατομῆς πλευρᾶς α, ἡ ὁποία φορτίζεται μέ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη κατά μία διαγώνιό της. Νά μελετηθεῖ ἡ διανομή τῶν διατμητικῶν τάσεων καί νά σχεδιασθεῖ ἡ καμπύλη κατανομῆς τους κατά μῆκος τοῦ ὕψους τῆς διατομῆς.





Θεωροῦμε ὅτι ἡ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη δρᾶ κατά μῆκος τοῦ ἄξονα Y. Τότε ὁ ἄξονας Z εἶναι ἡ οὐδέτερη γραμμή. Στήν τομή BB τῆς διατομῆς οἱ διατμητικές τάσεις τ_{xy} θά εἶναι : $\tau_{xy} = \dfrac{Q \cdot S_z}{I_{zz} \cdot b}$, ὅπου I_{zz} ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Z καί S_z ἡ στατική ροπή τοῦ σκιαγραφημένου τμήματος ὡς πρός τόν ἄξονα Z. Εἶναι : $I_{zz} = \dfrac{\alpha^4}{12}$ καί

$$S_z = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \sqrt{2}}{2} - y\right) \cdot \left[y + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \sqrt{2}}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{2} - 2 \cdot y}{2} \cdot \frac{4y + \alpha \cdot \sqrt{2}}{6} =$$

$$= \frac{b \cdot (\alpha \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot y) \cdot (4 \cdot y + \alpha \cdot \sqrt{2})}{24}, \text{ ἑπομένως } \tau_{xy} = \frac{Q \cdot b \cdot (\alpha \cdot \sqrt{2} - 2y) \cdot (4 \cdot y + \alpha \cdot \sqrt{2})}{24 \cdot \frac{\alpha^4}{12} \cdot b} =$$

$$= \frac{Q \cdot (\alpha \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot y) \cdot (4 \cdot y + \alpha \cdot \sqrt{2})}{2 \cdot \alpha^4}.$$

Ἔχουμε : $\dfrac{d\tau_{xy}}{dy} = 0 \Rightarrow -2 \cdot (4 \cdot y + \alpha \cdot \sqrt{2}) + 4 \cdot (\alpha \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot y) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{2}}{8}$

Δηλαδή γιά $y = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{2}}{8}$ παίρνουμε τή μέγιστη τ_{xy} καί $\tau_{xy\,max.} = \dfrac{9 \cdot Q}{8 \cdot \alpha^2}$.

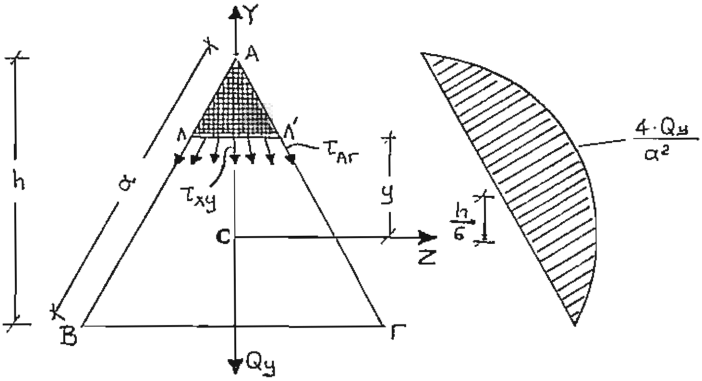
Ἐπίσης γιά $y = 0$ ἔχουμε $\tau_{xy} = \dfrac{Q}{\alpha^2}$.

ασκηση 3

Θεωροῦμε δοκό μέ διατομή ΑΒΓ σχήματος ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ἡ δοκός φορτίζεται μέ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη, ἡ ὁποία δρᾶ κατά τόν ἄξονα συμμετρίας τῆς διατομῆς.

α. Νά γίνει τό διάγραμμα διατμητικῶν τάσεων κατά μῆκος τῆς ΑΓ. Νά βρεθεῖ ἡ θέση, στήν ὁποία ἡ διατμητική τάση παρουσιάζει μέγιστη τιμή καί νά ὑπολογισθεῖ ἡ μέγιστη αὐτή τιμή.

β. Ἄν ὑπῆρχε καί συνιστῶσα Q_z τῆς διατμητικῆς δύναμης, πῶς μποροῦμε νά προσδιορίσουμε καί τίς διατμητικές τάσεις λόγω τῆς Q_z ;



λυση

Θεωροῦμε σύστημα ἀξόνων (Y, Z) μέ ἄξονα Y τόν ἄξονα συμμετρίας τῆς διατομῆς. Θεωροῦμε ὅτι ἡ ἐξωτερική φόρτιση δρᾶ κατά τόν ἄξονα Y. Θά βροῦμε τίς διατμητικές τάσεις τ_{xy} κατά μῆκος τοῦ ὕψους τῆς διατομῆς καί θά ὑπολογίσουμε τίς τάσεις κατά μῆκος τῆς ΑΓ, $\tau_{A\Gamma}$, ἀπό τή σχέση $\tau_{A\Gamma} = \dfrac{\tau_{xy}}{\cos 30^\circ}$.

Στή θέση ΛΛ' τῆς διατομῆς οἱ διατμητικές τάσεις τ_{xy} εἶναι:

$\tau_{xy} = \dfrac{Q_y \cdot S_z}{I_{zz} \cdot \Lambda\Lambda'}$, ὅπου I_{zz} ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Z καί S_z ἡ στατική ροπή τοῦ σκιαγραφημένου τμήματος ὡς πρός τόν ἄξονα Z. Εἶναι: $I_{zz} = \dfrac{\alpha \cdot h^3}{36}$, ὅπου h τό ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Τό ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΛΛ' εἶναι $\frac{2}{3}\cdot h - y$, ὅπου y ἡ ἀπόσταση τοῦ ΛΛ' ἀπό τόν ἄξονα Z. Ἐπίσης: $\dfrac{\Lambda\Lambda'}{\alpha} = \dfrac{2/3\cdot h - y}{h} \Rightarrow \dfrac{\Lambda\Lambda'}{\alpha} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot h - y}{\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Lambda\Lambda' = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot h - y\right)$. Τό ἐμβαδό, λοιπόν, (ΑΛΛ') εἶναι:

$(A\Lambda\Lambda') = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot h - y\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot h - y\right)$. Ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΑΛΛ' ἀπό τόν ἄξονα Z εἶναι: $\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot h - y\right) + y = \dfrac{2}{9}\cdot h + \dfrac{2}{3}\cdot y$.

Ἡ στατική, λοιπόν, ροπή S_z εἶναι:

$S_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h - y\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot h + \frac{2}{3} \cdot y\right)$ καί οἱ διατμητικές τάσεις τ_{xy} θά εἶναι :

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z}{I_{zz} \cdot ΛΛ'} = \frac{Q_y \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h - y\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot h + \frac{2}{3} \cdot y\right)}{\frac{a \cdot h^3}{36} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h - y\right)} = \frac{18 \cdot Q_y \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h - y\right) \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot h + \frac{2}{3} \cdot y\right)}{a \cdot h^3}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q_y \cdot (2h - 3y) \cdot (2h + 6y)}{a \cdot h^3}$$

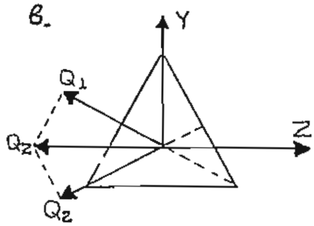
Τή μέγιστη τ_{xy} τήν παίρνουμε γιά $\frac{d\tau_{xy}}{dy} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 \cdot (2 \cdot h + 6 \cdot y) + 6 \cdot (2 \cdot h - 3 \cdot y) = 0 \Rightarrow y = \frac{h}{6}$ καί εἶναι $\tau_{xy\,max.} = \frac{3 \cdot Q_y}{a \cdot h}$.

Ἡ μέγιστη τάση κατά μῆκος τῆς ΑΓ εἶναι $\tau_{ΑΓ\,max.} = \frac{3 \cdot Q_y}{a \cdot h} \cdot \frac{1}{\cos 30^\circ} =$

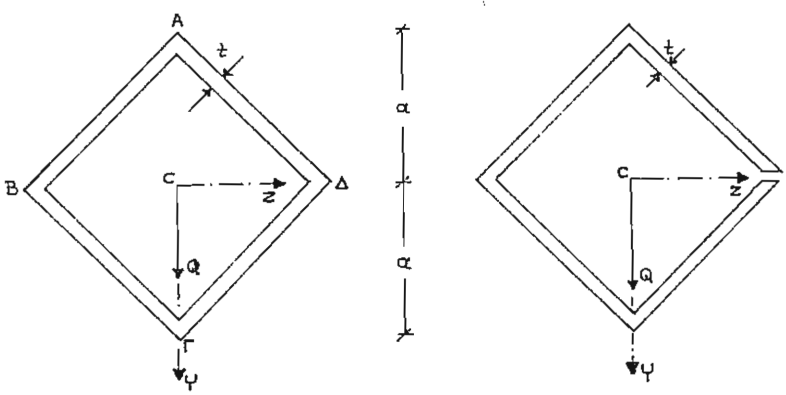
$= \frac{3 \cdot Q_y}{a \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tau_{ΑΓ\,max.} = \frac{4 \cdot Q_y}{a^2}$. Στίς θέσεις Α καί Γ ἡ στατική ροπή εἶναι μηδενική, ἐπομένως καί οἱ διατμητικές τάσεις στίς θέσεις αὐτές θά εἶναι μηδενικές.

β.



Στήν περίπτωση αὐτή ὁ ἄξονας Ζ δέν εἶναι ἄξονας συμμετρίας, ἐπομένως δέν μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε ἀπ' εὐθείας τίς διατμητικές τάσεις λόγω τῆς Q_z. Ἀναλύουμε, λοιπόν, τήν Q_z σέ συνιστῶσες Q_1, Q_2 κατά 2 ἄξονες συμμετρίας τῆς διατομῆς καί ἀναγόμαστε πιά σέ γνωστό πρόβλημα (προσδιορισμός τῶν διατμητικῶν τάσεων λόγω τῶν Q_1, Q_2, μέ βάση τούς γνωστούς τύπους).

ασκηση 4



1) Ἡ κλειστή λεπτόπαχη διατομή τοῦ ἀριστεροῦ σχήματος καταπονεῖται μέ τέμνουσα δύναμη Q. Νά βρεθοῦν τά διαγράμματα διατμητικῶν τάσεων.

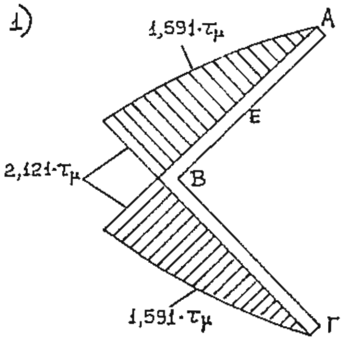
2) Ἄν στή διατομή ὑπάρχει λεπτή σχισμή (δεξιό σχῆμα), νά βρεθοῦν :

α. τά διαγράμματα διατμητικών τάσεων, πού ὀφείλονται στήν τέμνουσα δύναμη Q.

β. τό κέντρο διάτμησης καί ἡ πρόσθετη ροπή στρέψης, πού καταπονεῖ τή διατομή.

λυση

1)



Θεωροῦμε ὅτι κόβουμε τή διατομή στά σημεῖα A καί Γ καί ὅτι τή χωρίζουμε σέ 2 τμήματα τά ΑΒΓ, ΑΔΓ. Σέ καθένα ἀπό τά τμήματα αὐτά ἐνεργεῖ τέμνουσα δύναμη ἴση μέ $\frac{Q}{2}$. Θά βροῦμε τό διάγραμμα τῶν διατμητικῶν τάσεων μόνο γιά τό ἀριστερό τμῆμα ΑΒΓ. Λόγω συμμετρίας θά ἔχουμε ἴδιο διάγραμμα καί στό δεξιό τμῆμα ΑΔΓ. Γιά τόν κλάδο ΑΒ θά βροῦμε τίς διατμητικές τάσεις στά σημεῖα Α, Β καί στό μέσο Ε τῆς ΑΒ. Λόγω συμμετρίας θά ἐπικρατοῦν ἴδιες διατμητικές τάσεις καί στά ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ κλάδου ΒΓ. Θά ὑπολογίσουμε τίς διατμητικές τάσεις συναρτήσει τῆς μέσης τιμῆς $\tau_\mu = \frac{Q}{A}$, ὅπου Α τό ἐμβαδό ὁλόκληρης τῆς λεπτόπαχης διατομῆς. Εἶναι:

$$A = 4\cdot t\cdot \alpha\sqrt{2} \Rightarrow \tau_\mu = \frac{Q}{4\cdot t\cdot \alpha\sqrt{2}}$$

Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Ζ εἶναι:

$$I_{zz}^{AB\Gamma} = 2\cdot\left[\frac{t\cdot\sqrt{2}\cdot\alpha^3}{12} + \frac{t\cdot\sqrt{2}\cdot\alpha\cdot\alpha^2}{4}\right] = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^3}{3}$$

Στή θέση Α ἡ στατική ροπή ὡς πρός τόν ἄξονα Ζ εἶναι μηδενική, ἐπομένως $\tau_A = \dfrac{\frac{Q}{2}\cdot S_A}{I_{zz}\cdot t} = 0$.

Στή θέση Ε ἡ στατική ροπή εἶναι: $S_E = \frac{t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{3\cdot\alpha}{4}\right) = -\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^2}{8}$

καί ἐπομένως ἡ διατμητική τάση θά εἶναι: $\tau_E = \dfrac{\frac{Q}{2}\cdot S_E}{I_{zz}\cdot t}$ * $=$

$$= \frac{\frac{Q}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^2}{8}}{\frac{2\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^3}{3}\cdot t} = \frac{9\cdot Q}{32\cdot\alpha\cdot t}$$

καί ἀντικαθιστώντας στήν τελευταία τήν τιμή τῆς Q συναρτήσει τῆς τ_μ προκύπτει: $\tau_E = \frac{9}{32}\cdot\frac{4\cdot t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\tau_\mu}{\alpha\cdot t} = \frac{9\cdot\sqrt{2}}{8}\cdot\tau_\mu = 1,591\cdot\tau_\mu$.

Στή θέση Β ἡ στατική ροπή εἶναι: $S_B = t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^2}{2}$

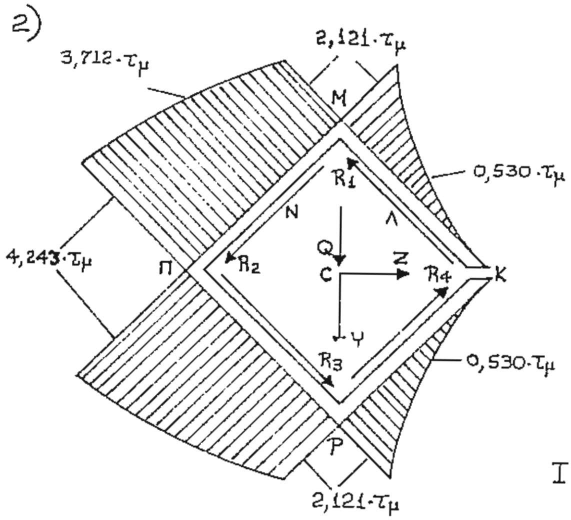
καί ἐπομένως: $\tau_B = \dfrac{\frac{Q}{2}\cdot S_B}{I_{zz}\cdot t} = \dfrac{\frac{Q}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^2}{2}}{\frac{2\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^3}{3}\cdot t} = \frac{3\cdot Q}{8\cdot\alpha\cdot t} = \frac{3}{8}\cdot\frac{4\cdot t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\tau_\mu}{\alpha\cdot t} =$

$$= \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\tau_\mu = 2,121\cdot\tau_\mu .$$

* δέν λαμβάνουμε ὑπ' ὄψη τό πρόσημο τῆς στατικῆς ροπῆς.

Μέ βάση τίς τιμές αὐτές χαράζουμε τό διάγραμμα διατμητικῶν τάσεων.

2)



α. Ἔχουμε τώρα νά μελετήσουμε μιά λεπτόπαχη ἀνοιχτή διατομή. Θά βροῦμε τό διάγραμμα διατμητικῶν τάσεων μόνο στό τμῆμα ΚΜΠ τῆς διατομῆς. Λόγω συμμετρίας θά ἔχουμε ἴδιο διάγραμμα καί στό τμῆμα ΚΡΠ.

Θεωροῦμε ὅτι ἡ σχισμή εἶναι πολύ λεπτή, ὁπότε ἡ ροπή ἀδράνειας I_{zz} τῆς λεπτόπαχης ἀνοιχτῆς διατομῆς εἶναι:

$$I_{zz} = 4\cdot\left[\frac{t\cdot\sqrt{2}\cdot\alpha^3}{12} + \frac{t\cdot\sqrt{2}\cdot\alpha\cdot\alpha^2}{4}\right] = \frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^3}{3}.$$

Στή θέση Κ ἡ στατική ροπή ὡς πρός τόν ἄξονα Ζ εἶναι μηδενική, ἐπομένως εἶναι μηδενική καί ἡ διατμητική τάση στή θέση αὐτή, $\tau_K = 0$.
Στή θέση Λ ἡ στατική ροπή εἶναι: $S_\Lambda = \frac{t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\alpha}{4}\right)$ καί ἐπομένως

$$\tau_\Lambda = \frac{Q\cdot S_\Lambda}{I_{zz}\cdot t} = \frac{Q\cdot\frac{t\cdot\alpha^2\cdot\sqrt{2}}{8}}{\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^3}{3}\cdot t} = \frac{3}{32}\cdot\frac{Q}{\alpha\cdot t}.$$

Ἀντικαθιστώντας στήν τελευταία τήν τιμή τῆς Q συναρτήσει τῆς τ_μ προκύπτει $\tau_\Lambda = \frac{3}{32}\cdot\frac{4\cdot t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\tau_\mu}{\alpha\cdot t} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{8}\cdot\tau_\mu = 0,530\cdot\tau_\mu$.

Ἐντελῶς ὅμοια βρίσκουμε ὅτι γιά τή θέση Μ εἶναι: $S_M = t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$

καί $$\tau_M = \frac{Q\cdot S_M}{I_{zz}\cdot t} = \frac{Q\cdot\frac{t\cdot\alpha^2\cdot\sqrt{2}}{2}}{\frac{4\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^3}{3}\cdot t} = \frac{3}{8}\cdot\frac{Q}{t\cdot\alpha} = \frac{3}{8}\cdot\frac{4\cdot t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\tau_\mu}{t\cdot\alpha} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\tau_\mu =$$

$= 2,121\cdot\tau_\mu$.

Γιά τή θέση Ν θά ἔχουμε $S_N = t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{t\cdot\alpha\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{3\cdot\alpha}{4}\right) =$

$= -\frac{7\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^2}{8}$, ὁπότε $$\tau_N = \frac{Q\cdot S_N}{I_{zz}\cdot t} = \frac{Q\cdot\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^2}{8}}{\frac{4\sqrt{2}\cdot t\cdot\alpha^3}{3}\cdot t} = \frac{21}{32}\cdot\frac{Q}{\alpha\cdot t} =$$

$$= \frac{21}{32}\cdot\frac{4\cdot t\cdot\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\tau_\mu}{\alpha\cdot t} = \frac{21\cdot\sqrt{2}}{8}\cdot\tau_\mu = 3,712\cdot\tau_\mu.$$

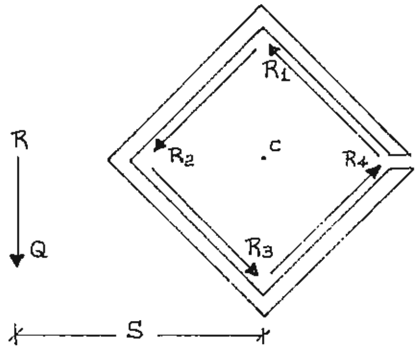
Τέλος γιά τή θέση Π θά εἶναι $S_\Pi = 2\cdot\left[t\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\right]$ καί ἑπομένως ἡ διατμητική τάση εἶναι :

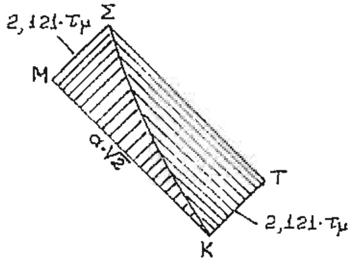
$$\tau_\Pi = \frac{Q\cdot S_\Pi}{I_{zz}\cdot t} = \frac{Q\cdot t\cdot a^2\cdot\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{2}\cdot t\cdot a^3}{3}\cdot t} = \frac{3}{4}\cdot\frac{Q}{a\cdot t} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4\cdot t\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot\tau_\mu}{a\cdot t} = 3\cdot\sqrt{2}\cdot\tau_\mu$$

$$= 4{,}243\ \tau_\mu$$

Μέ βάση τίς παραπάνω τιμές χαράζουμε τό διάγραμμα διατμητικῶν τάσεων.

β.





Θά βροῦμε πρῶτα τή συνισταμένη δύναμη τῶν διατμητικῶν τάσεων. Ἡ συνισταμένη αὐτή δύναμη γιά κάθε κλάδο δίνεται ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ διαγράμματος τῶν διατμητικῶν τάσεων. Γιά τόν κλάδο, λοιπόν, ΚΜ ἔχουμε ὅτι ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς συνισταμένης δύναμης R_1 εἶναι ἴση μέ :

$$t\cdot\left[(\text{ΚΜΣΤ})-(\text{ΚΣΤ})\right] = t\cdot\left(a\cdot\sqrt{2}\cdot 2{,}121\cdot\tau_\mu - \frac{2}{3}\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot 2{,}121\overset{*}{\cdot}\tau_\mu\right) = 1{,}0\cdot t\cdot a\cdot\tau_\mu\ .$$

Ἡ συνισταμένη δύναμη R_2 ἔχει ἀριθμητική τιμή ἴση μέ :

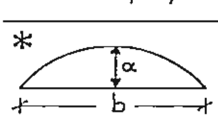
$$t\cdot\left(a\cdot\sqrt{2}\cdot 2{,}121\cdot\tau_\mu + \frac{2}{3}\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot 2{,}121\cdot\tau_\mu\right) = 5{,}0\cdot t\cdot a\cdot\tau_\mu\ .$$

Ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς συνισταμένης δύναμης R_3 εἶναι ἴση μέ τήν τιμή τῆς δύναμης R_2 καί ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς δύναμης R_4 εἶναι ἴση μέ τήν τιμή τῆς δύναμης R_1.

Ἐπειδή ἡ διατομή ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα Ζ, τό κέντρο

---

*



Ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολῆς εἶναι : $E = \frac{2}{3}\cdot b\cdot a$. Βέβαια τό ΚΣΤ ἰσοῦται μέ τό μισό μιᾶς παραβολῆς μέ βάση 2·(ΣΤ) καί ὕψος (ΚΤ). Ἔτσι θά ἦταν σωστότερο νά γράφαμε : $(\text{ΚΣΤ}) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot 2\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot 2{,}121\cdot\tau_\mu\right] = \frac{2}{3}\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot 2{,}121\cdot\tau_\mu$.

διάτμησης θά βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα Ζ. Ἄς εἶναι s ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου διάτμησης R, ἀπό τό κέντρο βάρους C τῆς διατομῆς. Θεωροῦμε ὅτι ἡ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη ἐφαρμόζει στό κέντρο διάτμησης R. Παίρνοντας ροπές ὡς πρός τό C ἔχουμε :

$$Q\cdot s = 2\cdot R_1\cdot\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2} + 2\cdot R_2\cdot\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Q\cdot s = 2\cdot\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot(1+5)\cdot t\cdot a\cdot\tau_\mu \Rightarrow$$

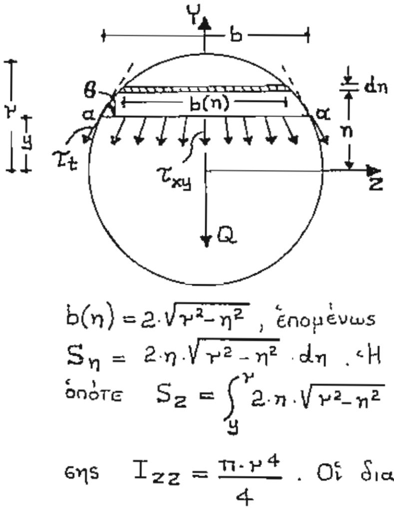
$$\Rightarrow s = \frac{6\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot a^2\cdot\tau_\mu}{Q} = \frac{6\cdot\sqrt{2}\cdot t\cdot a^2\cdot\tau_\mu}{\tau_\mu\cdot 4\cdot t\cdot a\cdot\sqrt{2}} = 1{,}5\cdot a\ ,\ \text{διότι}\ \ \tau_\mu = \frac{Q}{4\cdot t\cdot a\cdot\sqrt{2}}\ .$$

Ὅταν, λοιπόν, ἡ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη ἐφαρμόζει στό κέντρο διάτμησης R, ἡ διατομή δέν καταπονεῖται ἀπό στρεπτική ροπή. Δεδομένου ὅμως ὅτι ἡ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη Q ἐφαρμόζει στό κέντρο βάρους C τῆς διατομῆς, αὐτή θά καταπονεῖται ἐπιπρόσθετα ἀπό μιά ροπή στρέψης $M_S = Q\cdot s = \tau_\mu\cdot 4\cdot t\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot 1{,}5\cdot a =$
$= 8{,}49\cdot t\cdot a^2\cdot\tau_\mu$.

ασκηση 5

Θεωροῦμε δοκό κυκλικῆς διατομῆς ἀκτίνας r, ἡ ὁποία φορτίζεται μέ ἐξωτερική τέμνουσα δύναμη Q κατά τή διεύθυνση μιᾶς διαμέτρου της. Νά μελετηθεῖ ἡ διανομή τῶν διατμητικῶν τάσεων.

λυση



Οἱ διατμητικές τάσεις τ_{xy} στήν τομή α-α θά προκύψουν ἀπό τή σχέση $\tau_{xy} = \dfrac{Q\cdot S_Z}{I_{ZZ}\cdot b}$, ὅπου S_Z εἶναι ἡ στατική ροπή ὡς πρός Ζ τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύκλου, πού βρίσκεται πάνω ἀπό τήν α-α. Γιά νά ὑπολογίσουμε τήν S_Z θεωροῦμε σέ ἀπόσταση η ἀπό τόν ἄξονα Ζ μιά στοιχειώδη λωρίδα πάχους dη. Τό πάχος τῆς στοιχειώδους αὐτῆς λωρίδας εἶναι $b(\eta) = 2\cdot\sqrt{r^2-\eta^2}$, ἐπομένως ἡ στατική ροπή ὡς πρός Ζ τῆς λωρίδας αὐτῆς εἶναι $S_\eta = 2\cdot\eta\cdot\sqrt{r^2-\eta^2}\cdot d\eta$. Ἡ S_Z θά προκύψει ὁλοκληρώνοντας τήν S_η μεταξύ y καί r, ὁπότε $S_Z = \int_y^r 2\cdot\eta\cdot\sqrt{r^2-\eta^2}\cdot d\eta = -\int_y^r\sqrt{r^2-\eta^2}\cdot d(r^2-\eta^2) = \frac{2}{3}(r^2-y^2)^{3/2}$. Εἶναι ἐπίσης $I_{ZZ} = \dfrac{\pi\cdot r^4}{4}$. Οἱ διατμητικές τάσεις, λοιπόν, τ_{xy} εἶναι :

$$\tau_{xy} = \frac{Q\cdot\frac{2}{3}(r^2-y^2)^{3/2}}{\frac{\pi\cdot r^4}{4}\cdot b} = \frac{8}{3}\cdot\frac{Q\,(r^2-y^2)^{3/2}}{\pi\cdot b\cdot r^4}$$

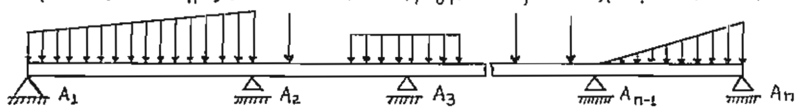
῾Η μέγιστη τ_{xy} θά προκύψει γιά $y=0$, ὁπότε ἡ ἀντίστοιχη τιμή τοῦ b εἶναι $b=2r$, καί $\tau_{xy\,max} = \frac{8}{3}\cdot\frac{Q\cdot(r^2)^{3/2}}{\pi\cdot 2r\cdot r^4} = \frac{4}{3}\cdot\frac{Q}{r^2}$.

Οἱ διατμητικές τάσεις τ_t κατά μῆκος τοῦ περιγράμματος τῆς διατομῆς θά βρεθοῦν ἀπό τή σχέση $\tau_t = \frac{\tau_{xy}}{\sin\beta}$, ὅπου $\sin\beta = \frac{b/2}{r} = \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{r}$, ὁπότε

$$\tau_t = \frac{8}{3}\cdot\frac{Q\cdot(r^2-y^2)^{3/2}}{\pi\cdot b\cdot r^4}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{Q\cdot(r^2-y^2)}{\pi\cdot b\cdot r^3}$$

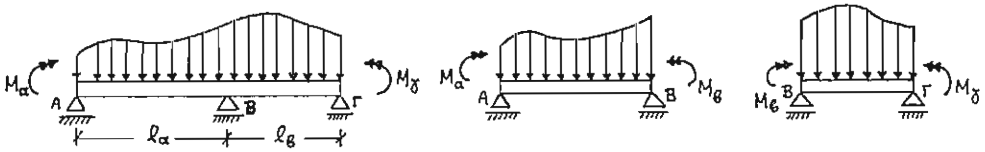
δ. ΕΞΙΣΩΣΗ CLAPEYRON

Μέ τήν ἐξίσωση Clapeyron μποροῦμε νά ἐπιλύσουμε συνεχεῖς δοκούς, δηλαδή δοκούς πού στηρίζονται σέ περισσότερα ἀπό δύο στηρίγματα. Ἕνα ἀπ᾽ αὐτά τά στηρίγματα θεωρεῖται σάν ἄρθρωση, ἐνῶ τά ὑπόλοιπα θεωροῦνται σάν κυλίσεις. Ἔτσι ἄν ἡ δοκός στηρίζεται σέ n στηρίγματα, θά ἔχουμε $n-1$ κυλίσεις καί



μία ἄρθρωση. Οἱ ἄγνωστοι, πού εἰσάγουν οἱ ἀντιδράσεις στίς στηρίξεις, εἶναι $n+1$ ($n-1$ ἄγνωστοι στίς $n-1$ κυλίσεις καί 2 ἄγνωστοι στή μία ἄρθρωση). Δεδομένου ὅτι διαθέτουμε μόνο τίς 3 στερεοστατικές ἐξισώσεις ἰσορροπίας, ἡ συνεχής δοκός εἶναι $n-2$ φορές ὑπερστατική (στατικά ἀόριστη). Ἐκλέγουμε σάν ὑπερστατικά μεγέθη τίς ροπές στίς ἐνδιάμεσες $n-2$ στηρίξεις.

Ἄς εἶναι Α, Β, Γ 3 διαδοχικά στηρίγματα καί M_α, M_β, M_γ οἱ ροπές στίς



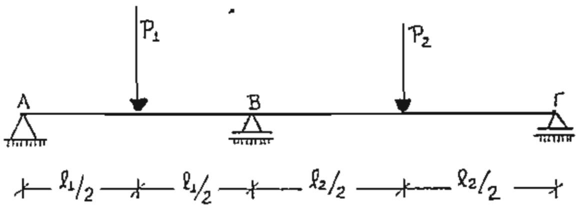
θέσεις Α, Β, Γ. Στό σχῆμα οἱ φορές τῶν ροπῶν ἔχουν θεωρηθεῖ θετικές. Ἄν ὅμως ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ φορέα ὁρισμένες ἀπό τίς ροπές αὐτές (ἤ ἐνδεχομένως καί ὅλες) προκύψουν ἀρνητικές, αὐτό θά σημαίνει ὅτι οἱ ροπές αὐτές θά ἔχουν ἀντίθετες φορές ἀπό ὅτι στό σχῆμα. Γιά τό τμῆμα ΑΒΓ τῆς δοκοῦ ἡ ἐξίσωση Clapeyron εἶναι:

$$M_\alpha\cdot\ell_\alpha + 2\cdot M_\beta\cdot(\ell_\alpha+\ell_\beta) + M_\gamma\cdot\ell_\beta = -\frac{6\cdot A_\alpha\cdot\bar{X}_\alpha}{\ell_\alpha} - \frac{6\cdot A_\beta\cdot\bar{X}_\beta}{\ell_\beta} \quad (1)$$

, ὅπου οἱ ποσότητες $\frac{6\cdot A_\alpha\cdot\bar{X}_\alpha}{\ell_\alpha}$ (γιά τό τμῆμα ΑΒ), $\frac{6\cdot A_\beta\cdot X_\beta}{\ell_\beta}$ (γιά τό τμῆμα ΒΓ) παίρνονται ἀπό πίνακες ἀνάλογα μέ τή μορφή τῆς φόρτισης.

Στά $n-2$ ἐνδιάμεσα στηρίγματα ἀντιστοιχοῦν $n-2$ σχέσεις μορφῆς ἀνάλογης μέ τήν (1). Μέ βάση τίς σχέσεις αὐτές μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τίς ροπές στίς ἐνδιάμεσες στηρίξεις καί νά ἐπιλύσουμε ἔπειτα τή συνεχή δοκό.

ασκηση 1.



Νά ἐπιλυθεῖ ἡ συνεχής δοκός τοῦ σχήματος, γιά τήν ὁποία θεωροῦμε ὅτι ἡ διατομή της εἶναι ὁμοιόμορφη σ' ὅλο της τό μῆκος.

λυση

Οἱ ἄγνωστοι, πού εἰσάγουν οἱ ἀντιδράσεις στίς στηρίξεις Α, Β, Γ εἶναι 4 (2 στήν ἄρθρωση Α καί ἀπό ἕνας στίς κυλίσεις Β καί Γ). Δεδομένου ὅτι διαθέτουμε μόνο τίς 3 στερεοστατικές ἐξισώσεις ἰσορροπίας, ὁ φορέας τοῦ σχήματος εἶναι μιά φορά στατικά ἀόριστος. Ἐκλέγουμε ὡς ὑπερστατικό μέγεθος τή ροπή M_B. Ἡ ἐξίσωση Clapeyron εἶναι:

$$M_\alpha \cdot \ell_\alpha + 2 \cdot M_B \cdot (\ell_\alpha + \ell_B) + M_\gamma \cdot \ell_B = -\frac{6 \cdot A_\alpha \cdot \overline{X}_\alpha}{\ell_\alpha} - \frac{6 \cdot A_B \cdot \overline{X}_B}{\ell_B} \quad (1)$$

Στό πρόβλημά μας εἶναι: $M_\alpha = 0$, $M_\gamma = 0$, $\ell_\alpha = \ell_1$, $\ell_B = \ell_2$. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε τίς ποσότητες τοῦ δεύτερου μέλους τῆς ἐξίσωσης (1) γιά τό πρόβλημά μας. Εἶναι:

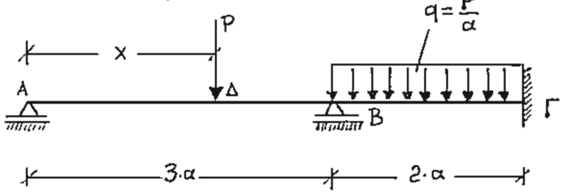
$$\frac{6 \cdot A_\alpha \cdot \overline{X}_\alpha}{\ell_\alpha} = \frac{P_1 \cdot \frac{\ell_1}{2}\left(\ell_1^2 - \frac{\ell_1^2}{4}\right)}{\ell_1} = \frac{3 \cdot P_1 \cdot \ell_1^2}{8}$$

$$\frac{6 \cdot A_B \cdot \overline{X}_B}{\ell_B} = \frac{P_2 \cdot \frac{\ell_2}{2} \cdot \left(\ell_2^2 - \frac{\ell_2^2}{4}\right)}{\ell_2} = \frac{3 \cdot P_2 \cdot \ell_2^2}{8}$$

Ἀντικαθιστώντας τίς τιμές αὐτές στήν (1) παίρνουμε:

$$2 \cdot M_B \cdot (\ell_1 + \ell_2) = -\frac{3 \cdot P_1 \cdot \ell_1^2}{8} - \frac{3 \cdot P_2 \cdot \ell_2^2}{8} \Rightarrow M_B = -\frac{3}{16} \cdot \frac{P_1 \cdot \ell_1^2 + P_2 \cdot \ell_2^2}{\ell_1 + \ell_2}.$$

ασκηση 2



Στή συνεχή δοκό τοῦ σχήματος, ἡ ὁποία ἔχει σταθερή ροπή ἀδράνειας I_{zz} καί δέχεται φορτίσεις P, q, ὅπως στό σχῆμα, νά βρεθοῦν:

α. ἡ ἀπόσταση x τοῦ μοναχικοῦ φορτίου P, ὥστε ἡ M_B νά γίνει μέγιστη.

β. γιά τή θέση αὐτή τοῦ P νά βρεθεῖ ἡ κατακόρυφη μετατόπιση τοῦ σημείου Δ.

Λύση

Οἱ ἄγνωστοι, πού εἰσάγουν οἱ ἀντιδράσεις στίς στηρίξεις Α, Β, Γ εἶναι 5 (ἀπό ἕνας στίς κυλίσεις Α, Β καί 3 στήν πάκτωση Γ). Δεδομένου ὅτι διαθέτουμε μόνο τίς 3 στερεοστατικές ἐξισώσεις ἰσορροπίας, ἡ δοκός τοῦ σχήματος εἶναι 2 φορές στατικά ἀόριστη. Θά χρησιμοποιήσουμε 2 φορές τήν ἐξίσωση Clapeyron:

$$M_\alpha \cdot l_\alpha + 2\cdot M_\beta \cdot (l_\alpha + l_\beta) + M_\gamma \cdot l_\beta = -\frac{6\cdot A_\alpha \cdot \bar{X}_\alpha}{l_\alpha} - \frac{6\cdot A_\beta \cdot \bar{X}_\beta}{l_\beta}$$

Γιά τό τμῆμα ΑΒΓ θά ἔχουμε:

$$M_\alpha \cdot 3\alpha + 2\cdot M_\beta \cdot (3\alpha + 2\alpha) + M_\gamma \cdot 2\alpha = -\frac{6\cdot A_\alpha \cdot \bar{X}_\alpha}{l_\alpha} - \frac{6\cdot A_\beta \cdot \bar{X}_\beta}{l_\beta} \quad (1)$$

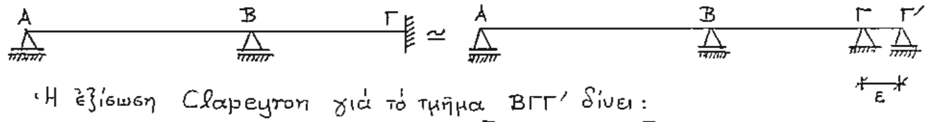
Στό πρόβλημά μας εἶναι $M_\alpha = 0$. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε ὅτι γιά τίς φορτίσεις τοῦ προβλήματός μας εἶναι: $\frac{6\cdot A_\alpha \cdot \bar{X}_\alpha}{l_\alpha} = \frac{P\cdot x\cdot[(3\alpha)^2 - x^2]}{3\alpha} = \frac{P\cdot x\cdot(9\alpha^2 - x^2)}{3\alpha}$,

$$\frac{6\cdot A_\beta \cdot \bar{X}_\beta}{l_\beta} = \frac{q\cdot(2\alpha)^3}{4} = \frac{\frac{P}{\alpha}\cdot 8\cdot\alpha^3}{4} = 2\cdot P\cdot \alpha^2 .$$

Ἀντικαθιστώντας τίς τιμές αὐτές στήν (1) παίρνουμε:

$$2\cdot M_\beta \cdot 5\alpha + M_\gamma \cdot 2\alpha = -\frac{P\cdot x\cdot(9\alpha^2 - x^2)}{3\alpha} - 2\cdot P\cdot\alpha^2 \quad (2)$$

Ἡ πάκτωση στό Γ ἰσοδυναμεῖ μέ ἕνα φανταστικό ἄνοιγμα ΓΓ΄, ἀπείρως μικροῦ μήκους ε, πού προεκτείνει τή δοκό πρός τά δεξιά τοῦ Γ.



Ἡ ἐξίσωση Clapeyron γιά τό τμῆμα ΒΓΓ΄ δίνει:

$$M_\beta \cdot 2\alpha + 2\cdot M_\gamma \cdot (2\alpha + \varepsilon) = -\frac{6\cdot A_\alpha \cdot \bar{X}_\alpha}{l_\alpha} - \frac{6\cdot A_\beta \cdot \bar{X}_\beta}{l_\beta}$$

Ὁ ὅρος $\frac{6\cdot A_\beta \cdot \bar{X}_\beta}{l_\beta}$ (πού ἀντιστοιχεῖ στό τμῆμα ΓΓ΄) εἶναι μηδενικός, ἐνῶ ἡ τιμή τοῦ ὅρου $\frac{6\cdot A_\alpha \cdot \bar{X}_\alpha}{l_\alpha}$ (πού ἀντιστοιχεῖ στό τμῆμα ΒΓ) ἔχει βρεθεῖ προηγουμένως, $\frac{6\cdot A_\alpha \cdot \bar{X}_\alpha}{l_\alpha} = 2\cdot P\cdot\alpha^2$. Ἀντικαθιστώντας αὐτές τίς τιμές στήν (3) παίρνουμε:

$$M_\beta \cdot 2\alpha + M_\gamma \cdot 4\alpha = -2\cdot P\cdot\alpha^2 \quad (4)$$

Ἀπό τή λύση τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (2) καί (4) προκύπτει:

$$M_\beta = -\frac{P\cdot x}{27\cdot\alpha^2}\cdot(9\alpha^2 - x^2) - \frac{P\cdot\alpha}{9}$$

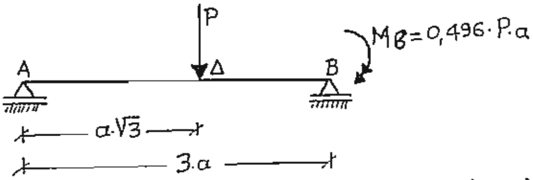
$$M_\gamma = \frac{P\cdot x}{54\cdot\alpha^2}\cdot(9\alpha^2 - x^2) - \frac{4\cdot P\cdot\alpha}{9}$$

Τή μέγιστη M_B τήν παίρνουμε γιά $\frac{dM_B}{dx} = 0 \Rightarrow 9\alpha^2 - x^2 + x\cdot(-2x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \alpha\cdot\sqrt{3}$ καί $M_{B\,max.} = -\frac{P\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot\left[9\alpha^2 - (\alpha\sqrt{3})^2\right]}{27\cdot\alpha^2} - \frac{P\cdot\alpha}{9} = -0,496\cdot P\cdot\alpha$,

ὅπου τό πρόσημο (−) σημαίνει ὅτι ἡ ροπή M_B εἶναι θλιπτική.

β. Στό σημεῖο Δ θά ἔχουμε ἐπαλληλία τῶν βυθίσεων, πού προκαλεῖ τό φορτίο P καί ἡ καμπτική ροπή $M_B = -0,496\cdot P\cdot\alpha$. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε γιά ἀμφιέρειστη δοκό, πού φορτίζεται μέ μοναχικό φορτίο P, τή βύθιση στό σημεῖο φόρτισης. Θά εἶναι λοιπόν:



$$u_\Delta^P = \frac{P\cdot(\alpha\cdot\sqrt{3})^2\cdot(3-\sqrt{3})^2\cdot\alpha^2}{3\cdot E\cdot I_{zz}\cdot 3\cdot\alpha} = 0,536\cdot\frac{P\cdot\alpha^3}{3\cdot E\cdot I_{zz}}$$

Ἀπό πίνακες ἐπίσης βρίσκουμε ὅτι γιά ἀμφιέρειστη δοκό AB, πού φορτίζεται στή θέση B μέ θλιπτική ροπή M_B, ἡ βύθιση u σ' ἕνα τυχαῖο σημεῖο, πού ἀπέχει ἀπόσταση x ἀπό τό A, δίνεται ἀπό τή σχέση:

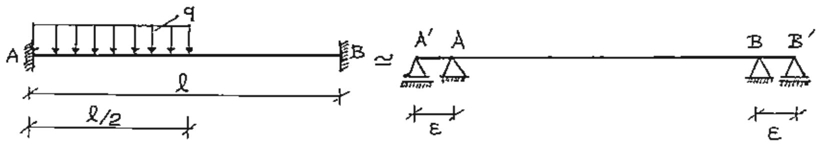
$E\cdot I_{zz}\cdot u = \frac{M_B\cdot x}{6\cdot l}\cdot(x^2 - l^2)$, ὅπου l τό μῆκος τῆς ἀμφιέρειστης δοκοῦ. Γιά $x = \alpha\cdot\sqrt{3}$ παίρνουμε:

$$u_\Delta^{M_B} = \frac{0,496\cdot P\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot(3\cdot\alpha^2 - 9\alpha^2)}{6\cdot 3\cdot\alpha\cdot E\cdot I_{zz}} = -0,286\cdot\frac{P\cdot\alpha^3}{E\cdot I_{zz}}$$

Ἑπομένως ἡ συνολική βύθιση στό Δ εἶναι:

$$u_\Delta = u_\Delta^P + u_\Delta^{M_B} = 0,250\cdot\frac{P\cdot\alpha^3}{E\cdot I_{zz}}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μέ ἐντελῶς ἀντίστοιχο τρόπο ἀντιμετωπίζεται καί ἡ περίπτωση τῆς ἀμφίπακτης δοκοῦ. Στήν ἐξίσωση Clapeyron ἄγνωστοι θά εἶναι οἱ



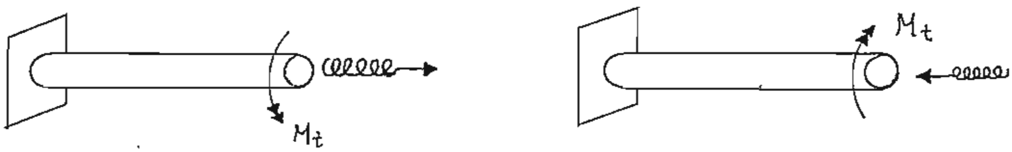
ροπές M_A, M_B. Θεωροῦμε λοιπόν δύο φανταστικά ἀνοίγματα A′A, B′B (ἀπείρως μικροῦ μήκους ε), ἕνα πρός τά ἀριστερά καί ἕνα πρός τά δεξιά τῆς δοκοῦ. Ἐφαρμόζοντας τήν ἐξίσωση Clapeyron στά τμήματα A′AB καί ABB′ παίρνουμε τίς δύο ἐξισώσεις, ἡ ἐπίλυση τῶν ὁποίων δίνει τίς τιμές τῶν M_A, M_B.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΤΡΕΨΗ

Κάνουμε τήν ἑξῆς σύμβαση σχετικά μέ τό πρόσημο τῆς στρεπτικῆς ροπῆς M_t.

Ἡ στρεπτική ροπή M_t θεωρεῖται θετική, ὅταν δεξιόστροφος κοχλίας, ὁ ὁποῖος στρέφεται κατά τή φορά τοῦ ζεύγους τῆς ροπῆς, ἐφελκύει τή διατομή· θεωρεῖται ἀρνητική, ὅταν δεξιόστροφος κοχλίας πού στρέφεται κατά τή φορά τῆς M_t θλίβει τή διατομή.



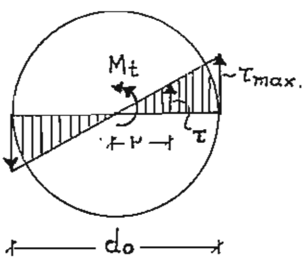
θετική M_t ἀρνητική M_t

Στό τυπολόγιο, πού ἀκολουθεῖ, δίνουμε τή λύση τοῦ προβλήματος τῆς στρέψης γιά δοκούς ὁρισμένων διατομῶν. Στό τυπολόγιο αὐτό συμβολίζουμε:

μέ τ τή διατμητική τάση λόγω στρέψης στήν τυχοῦσα θέση τῆς διατομῆς,
μέ M_t τή ροπή στρέψης,
μέ θ τήν ἀνά μονάδα μήκους γωνία στροφῆς,
μέ G τό μέτρο στρέψης,
μέ D τή στρεπτική δυσκαμψία $\left(D = \dfrac{M_t}{\theta}\right)$
μέ I_p τήν πολική ροπή ἀδράνειας

Ἔχουμε λοιπόν:

1) πλήρης κυκλική διατομή

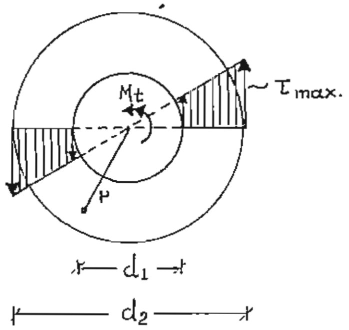


$$\tau = G\cdot\theta\cdot r = \frac{M_t\cdot r}{I_p}, \quad I_p = \frac{\pi\cdot r_o^4}{2},$$

$$\tau_{max.} = \frac{M_t\cdot r_o}{I_p} = \frac{16\cdot M_t}{\pi\cdot d_o^3}$$

$$\theta = \frac{M_t}{G\cdot I_p}, \quad D = I_p\cdot G.$$

2) σωληνωτή κυκλική διατομή

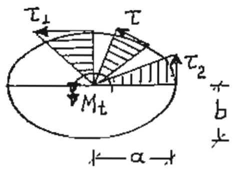


$$\tau = G\cdot\theta\cdot\rho = \frac{M_t\cdot\rho}{I_p}\ ,\quad I_p = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\rho_2^4-\rho_1^4\right)$$

$$\tau_{max.} = \frac{M_t\cdot\rho_2}{I_p} = \frac{16\cdot M_t\cdot d_2}{\pi\cdot\left(d_2^4-d_1^4\right)}$$

$$\theta = \frac{M_t}{G\cdot I_p}\ ,\quad D = I_p\cdot G$$

3) ἐλλειπτική διατομή

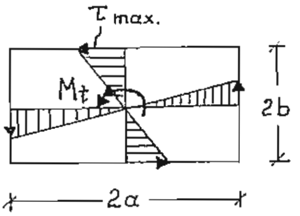


$$\tau_1 = \tau_{max.} = \frac{2\cdot M_t}{\pi\cdot\alpha\cdot b^2}\ ,\quad \tau_2 = \frac{2\cdot M_t}{\pi\cdot\alpha^2\cdot b}$$

$$\theta = \frac{M_t}{G\cdot\dfrac{\pi\cdot\alpha^3\cdot b^3}{\alpha^2+b^2}}\ ,\quad D = \frac{G}{4\cdot\pi^2}\cdot\frac{S^4}{I_p} = \frac{\pi\cdot\alpha^3\cdot b^3\cdot G}{\alpha^2+b^2}$$

$$S = \pi\cdot\alpha\cdot b\ ,\quad I_p = \frac{\pi\cdot\alpha\cdot b}{4}\cdot\left(\alpha^2+b^2\right)$$

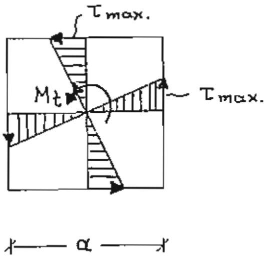
4) ὀρθογωνική διατομή



$$\tau_{max} = \frac{M_t\cdot(3\alpha+1{,}8\cdot b)}{8\cdot\alpha^2\cdot b^2}$$

$$D = \alpha\cdot b^3\cdot\left[\frac{16}{3} - 3{,}36\cdot\frac{b}{\alpha}\cdot\left(1-\frac{b^4}{12\cdot\alpha^4}\right)\right]\cdot G$$

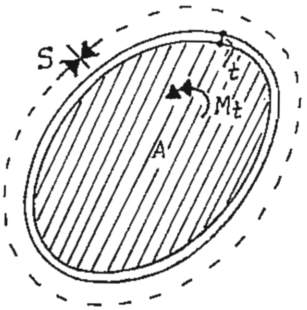
5) τετραγωνική διατομή



$$\tau_{max} = \frac{M_t}{0{,}208\cdot\alpha^3}$$

$$D = 0{,}14\cdot\alpha^4\cdot G$$

σ) κλειστός λεπτότοιχος σωλήνας



$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot A \cdot t}$$

$$\theta = \frac{M_t \cdot S}{4 \cdot A^2 \cdot G \cdot t}$$

Στήν άσκηση 1 εξετάζουμε τό πρόβλημα στρέψης δοκού ορθογωνικής διατομής χρησιμοποιώντας τασική συνάρτηση σέ καρτεσιανές συντεταγμέ.

Στήν άσκηση 2 εξετάζουμε πρόβλημα στρέψης χρησιμοποιώντας τασική συνάρτηση σέ πολικές συντεταγμένες.

Στήν άσκηση 3 δίνεται μιά συνάρτηση F καί ζητεῖται νά αποδειχτεῖ ότι είναι τασική συνάρτηση ενός προβλήματος.

Στήν άσκηση 4 βρίσκουμε τή στρεπτική δυσκαμψία ενός λεπτόπαχου σωλήνα.

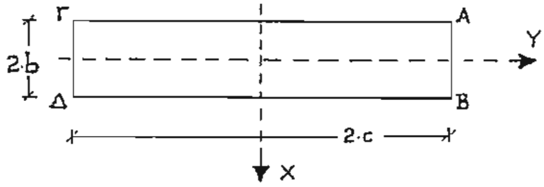
Στήν άσκηση 5 κάνουμε εφαρμογή τῶν συμπερασμάτων τῆς θεωρίας τοῦ αναλόγου τῆς μεμβράνης μέ εσωτερικές οπές γιά ένα λεπτόπαχο σωλήνα μέ δύο οπές.

Στήν άσκηση 6 έχουμε συνδυασμό στρέψης καί αξονικῆς δύναμης.

Στήν άσκηση 7 εξετάζουμε τήν καταπόνηση μιᾶς δοκοῦ, ή οποία δέχεται ροπή στρέψης, ροπή κάμψης καί εσωτερική πίεση.

Στίς δύο αυτές τελευταῖες ασκήσεις χρησιμοποιοῦμε καί ορισμένα στοιχεῖα από τά προηγούμενα κεφάλαια.

ασκηση 1



Θεωροῦμε τὴν πολὺ λεπτὴ ὀρθογωνικὴ διατομὴ τοῦ σχήματος, στὴν ὁποία τὸ b εἶναι πολὺ μικρότερο ἀπὸ τὸ c, $b \ll c$. Ἀπὸ τὴ μελέτη τοῦ προβλήματος στρέψης ὀρθογωνικῶν ράβδων συμπεραίνουμε ὅτι ἡ τασικὴ συνάρτηση, καὶ ἐπομένως, καὶ ἡ τάση μένουν περίπου σταθερὲς στὴ διεύθυνση Y ἐκτὸς ἀπὸ μιὰ μικρὴ περιοχὴ γύρω ἀπὸ τὰ ἄκρα AB καὶ ΓΔ τῆς διατομῆς. Ἔτσι γιὰ λεπτὲς διατομὲς μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι ἡ τασικὴ συνάρτηση F εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ x.

α. Νὰ βρεθεῖ ἡ $F(x)$.

β. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ διανομὴ τάσεων καὶ ἡ μέγιστη διατμητικὴ τάση συναρτήσει τῆς στρεπτικῆς ροπῆς M_t.

γ. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ στρεπτικὴ δυσκαμψία D τῆς διατομῆς.

λυση

α. Τὴν τασικὴ συνάρτηση F θὰ τὴ βροῦμε ἀπὸ τὴ σχέση $\nabla^2 F = -2\cdot G\cdot\theta$ (1), ὅπου G τὸ μέτρο στρέψης καὶ θ ἡ ἀνὰ μονάδα μήκους γωνία στροφῆς. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ∇^2 ἔχουμε: $\nabla^2 F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ F εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ x, θὰ ἔχουμε ὅτι $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ καὶ ἐπομένως ἡ (1) γράφεται: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2\cdot G\cdot\theta$ (2).

Ὁλοκληρώνοντας τὴ (2) δυὸ φορὲς παίρνουμε: $F = -G\cdot\theta\cdot x^2 + c_1\cdot x + c_2$ (3).

Τὶς σταθερὲς c_1, c_2 θὰ τὶς βροῦμε ἀπὸ τὶς ὁριακὲς συνθῆκες, ποὺ πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖ ἡ F. Ἔτσι στὸ περίγραμμα τῆς διατομῆς θὰ πρέπει ἡ F νὰ ἔχει μηδενικὴ τιμή. Δηλαδὴ γιὰ $x = b$ θὰ πρέπει $F = 0$, ὁπότε ἡ (3) δίνει: $0 = -G\cdot\theta\cdot b^2 + c_1\cdot b + c_2$ (4). Ἐπίσης γιὰ $x = -b$ θὰ ἔχουμε $F = 0$, ὁπότε ἀπὸ τὴν (3) παίρνουμε: $0 = -G\cdot\theta\cdot b^2 - c_1\cdot b + c_2$ (5). Ἀπὸ τὶς (4) καὶ (5) προκύπτει $c_1 = 0$, $c_2 = G\cdot\theta\cdot b^2$ καὶ μὲ ἀντικατάσταση τῶν τιμῶν αὐτῶν στὴν (3) παίρνουμε $F = G\cdot\theta\cdot(b^2 - x^2)$.

β. Εἶναι: $\sigma_{xz} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$, ἐπειδὴ ἡ F εἶναι συνάρτηση τοῦ x καὶ $\sigma_{yz} = -\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2\cdot x\cdot G\cdot\theta$ (6). Θὰ βροῦμε τὴν ἀνὰ μονάδα μήκους γωνία στροφῆς θ συναρτήσει τῆς στρεπτικῆς ροπῆς M_t. Εἶναι:

$$M_t = 2\cdot\iint F\cdot dx\cdot dy \Rightarrow M_t = 2\cdot\iint G\cdot\theta\cdot(b^2-x^2)\cdot dx\cdot dy = 2\cdot G\cdot\theta\cdot\int_{-c}^{c} dy\cdot\int_{-b}^{b}(b^2-x^2)\cdot dx =$$

$$= 2\cdot G\cdot\theta\cdot\left[y\right]_{-c}^{c}\cdot\left[b^2\cdot x-\frac{x^3}{3}\right]_{-b}^{b} = 2\cdot G\cdot\theta\cdot 2\cdot c\cdot\frac{4\cdot b^3}{3} \Rightarrow M_t = \frac{16}{3}\cdot c\cdot b^3\cdot G\cdot\theta\ ,$$

ὁπότε $\theta = \frac{3}{16}\cdot\frac{M_t}{c\cdot b^3\cdot G}$. Ἀντικαθιστώντας τὴν τιμὴ αὐτὴ τῆς θ στὴν (6) παίρνουμε: $\sigma_{yz} = 2\cdot x\cdot G\cdot\frac{3\cdot M_t}{16\cdot c\cdot b^3\cdot G} \Rightarrow \sigma_{yz} = \frac{3\cdot x\cdot M_t}{8\cdot c\cdot b^3}$. Τὴ μέγιστη σ_{yz} παίρνουμε γιὰ $x=b$ καὶ εἶναι $\sigma_{yz\,max.} = \frac{3}{8}\cdot\frac{M_t}{c\cdot b^2}$.

γ. Ἡ στρεπτικὴ δυσκαμψία D εἶναι: $D = \frac{M_t}{\theta} \Rightarrow D = \frac{\frac{16}{3}c\cdot b^3\cdot G\cdot\theta}{\theta}$

$$\Rightarrow D = \frac{16}{3}\cdot c\cdot b^3\cdot G\ .$$

ασκηση 2

Α. Στὸ πρόβλημα στρέψης:

α. Νὰ βρεθοῦν οἱ πολικὲς συνιστῶσες τῆς τάσης συναρτήσει τῶν σ_{xz}, σ_{yz}.

β. Νὰ βρεθοῦν οἱ πολικὲς συνιστῶσες τῆς τάσης συναρτήσει τῆς τασικῆς συνάρτησης F, ὅταν ἡ τελευταία ἐκφρασθεῖ συναρτήσει τῶν r καὶ ϕ.

γ. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἔκφραση σὲ πολικὲς συντεταγμένες τῆς σχέσης: $\nabla^2 F = -2\cdot G\cdot\theta$.

δ. Νὰ ἐκφραστεῖ ἡ στρεπτικὴ ροπὴ M_t συναρτήσει τῆς $F(r,\phi)$.

Β. Νὰ λυθεῖ τὸ πρόβλημα στρέψης κυκλικῆς δοκοῦ ἀκτίνας α, ὑποθέτοντας ὅτι λόγῳ συμμετρίας ἡ F εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ r.

λυση

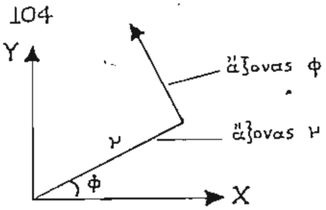
Α.

α. Ἡ ἔκφραση τοῦ τανυστῆ τάσης σὲ καρτεσιανὸ σύστημα συντεταγμένων XYZ εἶναι:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Vmatrix}$$

Ἐπειδὴ ἐξετάζουμε πρόβλημα στρέψης, θὰ εἶναι: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$, ἑπομένως:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{Vmatrix}$$



Σέ πολικό σύστημα συντεταγμένων (r, ϕ, Z) ἡ ἔκφραση τοῦ τανυστῆ τάσης εἶναι:

$$\underset{\sim}{\sigma}' = \begin{Vmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\phi} & \sigma_{\phi z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\phi} & \sigma_{zz} \end{Vmatrix}$$

Ἄν R εἶναι τό μητρῶο μετασχηματισμοῦ, δηλαδή τό μητρῶο πού ἀποτελεῖται ἀπό τά συνημίτονα κατεύθυνσης, πού σχηματίζουν οἱ ἄξονες τοῦ πολικοῦ συστήματος συντεταγμένων μέ τούς ἄξονες τοῦ καρτεσιανοῦ, θά ἔχουμε $\underset{\sim}{\sigma}' = \underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{R}^{*}$. Τό μητρῶο $\underset{\sim}{R}$ εἶναι:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{Vmatrix} \cos(r,X) & \cos(r,Y) & \cos(r,Z) \\ \cos(\phi,X) & \cos(\phi,Y) & \cos(\phi,Z) \\ \cos(Z,X) & \cos(Z,Y) & \cos(Z,Z) \end{Vmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{R} = \begin{Vmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

ὅπου φ ἡ γωνία, πού σχηματίζει ἡ πολική ἀκτίνα μέ τόν ἄξονα X. Ἔχουμε λοιπόν*:

$$\underset{\sim}{\sigma}' = \begin{Vmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\sigma}' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz}\cdot\cos\phi + \sigma_{yz}\cdot\sin\phi \\ 0 & 0 & -\sigma_{xz}\cdot\sin\phi + \sigma_{yz}\cdot\cos\phi \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\sigma}' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & (\sigma_{xz}\cdot\cos\phi + \sigma_{yz}\cdot\sin\phi)\cdot 1 \\ 0 & 0 & (-\sigma_{xz}\cdot\sin\phi + \sigma_{yz}\cdot\cos\phi)\cdot 1 \\ \sigma_{xz}\cdot\cos\phi + \sigma_{yz}\cdot\sin\phi & -\sigma_{xz}\cdot\sin\phi + \sigma_{yz}\cdot\cos\phi & 0 \end{Vmatrix}$$

Ἑπομένως οἱ πολικές συνιστῶσες τῆς τάσης εἶναι:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{zz} = \sigma_{r\phi} = 0$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{xz}\cdot\cos\phi + \sigma_{yz}\cdot\sin\phi$$

$$\sigma_{\phi z} = -\sigma_{xz}\cdot\sin\phi + \sigma_{yz}\cdot\cos\phi$$

---

* Στά μητρῶα τῆς ἄσκησης αὐτῆς τό πλῆθος τῶν γραμμῶν ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν στηλῶν. Τέτοια μητρῶα λέγονται τετραγωνικά. Τό γινόμενο δύο τετραγωνικῶν μητρώων $\underset{\sim}{\alpha}$ καί $\underset{\sim}{\beta}$, τάξης μ, εἶναι ἕνα τετραγωνικό μητρῶο $\underset{\sim}{\gamma}$ ἐπίσης τάξης μ. Τό τυπικό στοιχεῖο γ_{ik} τοῦ μητρώου $\underset{\sim}{\gamma}$, δηλαδή τό στοιχεῖο πού βρίσκεται στήν i γραμμή καί στήν k στήλη, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν στοιχείων τῆς γραμμῆς α_i τοῦ μητρώου $\underset{\sim}{\alpha}$ ἐπί τά ὁμοτάξια στοιχεῖα τῆς στήλης β_k τοῦ μητρώου $\underset{\sim}{\beta}$.

β. Εἶναι : $\sigma_{rz} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \phi}$, $\sigma_{\phi z} = -\frac{\partial F}{\partial r}$

γ. Σέ καρτεσιανές συντεταγμένες εἶναι $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Σέ πολικές συντεταγμένες εἶναι $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$. Ἑπομένως ἡ ἔκφραση τῆς σχέσης $\nabla^2 F = -2 \cdot G \cdot \theta$ σέ πολικές συντεταγμένες εἶναι:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = -2 \cdot G \cdot \theta .$$

δ. Ἄν ἡ τασική συνάρτηση F εἶναι ἐκφρασμένη σέ καρτεσιανές συντεταγμένες , ἡ στρεπτική ροπή M_t εἶναι : $M_t = 2 \cdot \iint_{A(x,y)} F(x,y) \cdot dx \cdot dy$.

Θά βροῦμε τή στρεπτική ροπή M_t, ὅταν ἡ F εἶναι ἐκφρασμένη σέ πολικές συντεταγμένες . Ἀπό τό λογισμό τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἔχουμε ὅτι $\iint_{A(x,y)} F(x,y) \cdot dx \cdot dy = \iint_{A(r,\phi)} F(r,\phi) \cdot r \cdot dr \cdot d\phi$. Ἑπομένως εἶναι : $M_t = 2 \cdot \iint_{A(r,\phi)} F(r,\phi) \cdot r \cdot dr \cdot d\phi$.

Β. Ἔχουμε : $\nabla^2 F = -2 \cdot G \cdot \theta \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = -2 \cdot G \cdot \theta$ (1)

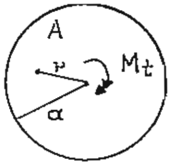
Ἐπειδή ἡ F εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ r , $F = F(r)$, θά ἔχουμε:
$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{dF}{dr}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{d^2 F}{dr^2}$. Ἑπομένως ἡ (1) γράφεται :

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dF}{dr} = -2 \cdot G \cdot \theta \Rightarrow \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dF}{dr} \right) = -2 \cdot G \cdot \theta \Rightarrow$$

$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dF}{dr} \right) = -2 \cdot G \cdot \theta \cdot r$ καί ὁλοκληρώνοντας παίρνουμε :

$$r \cdot \frac{dF}{dr} = -2 \cdot G \cdot \theta \cdot \frac{r^2}{2} + c_1 \Rightarrow \frac{dF}{dr} = -G \cdot \theta \cdot r + \frac{c_1}{r} \quad (2) .$$

Ὁλοκληρώνοντας τή (2) παίρνουμε : $F = -G \cdot \theta \cdot \frac{r^2}{2} + c_1 \cdot \ln r + c_2$ (3)



Τίς σταθερές c_1 , c_2 θά τίς βροῦμε ἀπό τίς ὁριακές συνθῆκες . Γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ r ἡ τασική συνάρτηση F δέν πρέπει νά ἀπειρίζεται. Ἐπειδή ὅμως γιά $r = 0$ ἔχουμε $\ln r = \infty$, γιά νά μήν άπειρίζεται ή F θά πρέπει $c_1 = 0$. Έπίσης στό περίγραμμα τής διατομής θά πρέπει ή F νά έχει μηδενική τιμή, δηλαδή γιά $r=\alpha$ θά πρέπει $F=0$, όπότε $0 = -\frac{G\cdot\theta\cdot\alpha^2}{2} + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{G\cdot\theta\cdot\alpha^2}{2}$

Ή τασική συνάρτηση, λοιπόν, F είναι: $F = \frac{G\cdot\theta}{2}\cdot(\alpha^2 - r^2)$.

Ή στρεπτική ροπή M_t είναι: $M_t = 2\iint_A F\cdot r\cdot dr\cdot d\phi =$

$$= 2\cdot\iint_A \frac{G\cdot\theta}{2}\cdot(\alpha^2-r^2)\cdot r\cdot dr\cdot d\phi = \frac{2\cdot G\cdot\theta}{2}\cdot\int_0^{2\pi} d\phi\cdot\int_0^{\alpha}(\alpha^2-r^2)\cdot r\cdot dr =$$

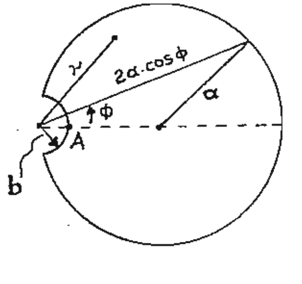
$$= G\cdot\theta\cdot\left[\phi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\alpha^2\cdot\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\alpha} = G\cdot\theta\cdot 2\pi\cdot\frac{\alpha^4}{4} \Rightarrow M_t = \frac{\pi\cdot\alpha^4\cdot G\cdot\theta}{2} \quad (4)$$

Οί τάσεις πού προκαλούνται είναι:

$\sigma_{rz} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial\phi} = 0$, $\sigma_{\phi z} = -\frac{\partial F}{\partial r} = G\cdot\theta\cdot r$. Έκφράζουμε άπό τήν (4) τήν άνά μονάδα μήκους γωνία στροφής θ συναρτήσει τής M_t. Είναι $\theta = \frac{2\cdot M_t}{\pi\cdot\alpha^4\cdot G}$, όπότε ή $\sigma_{\phi z}$ θά είναι:

$\sigma_{\phi z} = G\cdot r\cdot\frac{2\cdot M_t}{\pi\cdot\alpha^4\cdot G} = \frac{2\cdot M_t\cdot r}{\pi\cdot\alpha^4}$. Τή μέγιστη $\sigma_{\phi z}$ τήν παίρνουμε γιά $r=\alpha$ καί είναι $\sigma_{\phi z,max.} = \frac{2\cdot M_t}{\pi\cdot\alpha^3}$.

ασκηση 3



Θεωρούμε τή συνάρτηση:

$$F = \left[-\frac{r^2}{2} + \alpha\cdot r\cdot\cos\phi - \frac{b^2\alpha}{r}\cdot\cos\phi + \frac{b^2}{2}\right]\cdot G\cdot\theta.$$

α. Νά άποδειχθεί ότι ή F είναι τασική συνάρτηση τού προβλήματος τής στρέψης δοκού κυκλικής διατομής άκτίνας α, πού έχει αύλακα άκτίνας b.

β. Νά βρεθεί ή διανομή τάσεων καί **οί** τάσεις στό σημείο A συναρτήσει τής άνά μονάδα μήκους γωνίας στροφής θ.

λυση

Γιά νά είναι ή F τασική συνάρτηση, πρέπει:

(i) $\nabla^2 F = -2\cdot G\cdot\theta$

(ii) ή F νά έχει μηδενική τιμή στό περίγραμμα τής διατομής

(i) Είναι : $\nabla^2 F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$ (1)

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \left[-\frac{2\cdot r}{2} + \alpha\cdot\cos\phi - b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]\cdot G\cdot\Theta = \left[-r + \alpha\cdot\cos\phi + \frac{b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r^2}\right]\cdot G\cdot\Theta$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \left[-1 + b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi\cdot\left(-\frac{2\cdot r}{r^4}\right)\right]\cdot G\cdot\Theta = \left[-1 - \frac{2\cdot b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r^3}\right]\cdot G\cdot\Theta.$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \left[-\alpha\cdot r\cdot\sin\phi + \frac{b^2\cdot\alpha}{r}\cdot\sin\phi\right]\cdot G\cdot\Theta$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = \left[-\alpha\cdot r\cdot\cos\phi + \frac{b^2\cdot\alpha}{r}\cdot\cos\phi\right]\cdot G\cdot\Theta$$

Ἐπομένως ἡ (1) γράφεται :

$$\nabla^2 F = \left[-1 - \frac{2\cdot b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r^3} + \frac{1}{r}\cdot\left(-r + \alpha\cdot\cos\phi + \frac{b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\left(-\alpha\cdot r\cdot\cos\phi + \frac{b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r}\right)\right]\cdot G\cdot\Theta$$

$$= \left[-1 - \frac{2\cdot b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r^3} - 1 + \frac{\alpha\cdot\cos\phi}{r} + \frac{b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r^3} - \frac{\alpha\cdot\cos\phi}{r} + \frac{b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r^3}\right]\cdot G\cdot\Theta =$$

$$= -2\cdot G\cdot\Theta.$$

(ii) Θά πρέπει στό περίγραμμα τῆς διατομῆς, δηλαδή γιά $r = 2\cdot\alpha\cdot\cos\phi$ καί $r = b$, ἡ F νά ἔχει μηδενική τιμή.

Γιά $r = 2\cdot\alpha\cdot\cos\phi$ παίρνουμε :

$$F = \left[-\frac{4\cdot\alpha^2\cos^2\phi}{2} + \alpha\cdot 2\cdot\alpha\cdot\cos\phi\cdot\cos\phi - \frac{b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{2\cdot\alpha\cdot\cos\phi} + \frac{b^2}{2}\right]\cdot G\cdot\Theta = 0$$

Γιά $r = b$ παίρνουμε :

$$F = \left[-\frac{b^2}{2} + \alpha\cdot b\cdot\cos\phi - \frac{b^2\cdot\alpha}{b}\cdot\cos\phi + \frac{b^2}{2}\right]\cdot G\cdot\Theta = 0$$

B. Είναι $\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{zz} = \sigma_{r\phi} = 0$ καί

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{1}{r}\cdot\left[-\alpha\cdot r\cdot\sin\phi + \frac{b^2\cdot\alpha}{r}\cdot\sin\phi\right]\cdot G\cdot\Theta = G\cdot\Theta\cdot\alpha\cdot\sin\phi\cdot\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)$$

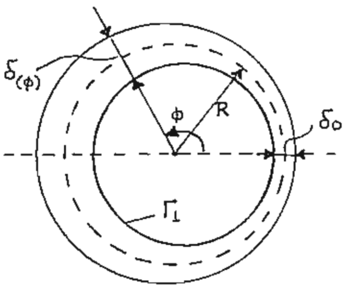
$$\sigma_{\phi z} = -\frac{\partial F}{\partial r} = -\left[-r + \alpha\cdot\cos\phi + \frac{b^2\cdot\alpha\cdot\cos\phi}{r^2}\right]\cdot G\cdot\Theta = G\cdot\Theta\cdot r - G\cdot\Theta\cdot\alpha\cdot\cos\phi\cdot\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)$$

Γιά τό σημεῖο A ἔχουμε $r = b$, $\sin\phi = 0$, $\cos\phi = 1$, ὁπότε :

$$\sigma^A_{rz} = 0$$

$$\sigma^A_{\phi z} = G\cdot\Theta\cdot b - G\cdot\Theta\cdot\alpha\cdot\left(\frac{b^2}{b^2} + 1\right) = G\cdot\Theta\cdot(b - 2\cdot\alpha).$$

ασκηση 4



῞Ενας σωλήνας λεπτοῦ πάχους ἔχει διατομή, τῆς ὁποίας ἡ μέση γραμμή εἶναι κύκλος ἀκτίνας R. Ἡ μεταβολή τοῦ πάχους τοῦ σωλήνα συναρτήσει τῆς γωνίας ϕ δίνεται ἀπό τή σχέση $\delta(\phi) = \delta_o \cdot \left(1 + \sin\frac{\phi}{2}\right)$

Νά βρεθεῖ ἡ στρεπτική δυσκαμψία D τοῦ σωλήνα συναρτήσει τῶν R, δ_o, G.

λυση

῎Ας εἶναι F ἡ τασική συνάρτηση, πού δίνει τή λύση τοῦ προβλήματος. ῎Αν εἶναι C_1 ἡ τιμή τῆς F στήν ἐσωτερική περίμετρο Γ_1 τῆς διατομῆς, τότε ἡ διατμητική τάση στή θέση ϕ δίνεται ἀπό τή σχέση $\tau_{(\phi)} = \dfrac{C_1}{\delta_{(\phi)}}$. Θά ἐκφράσουμε τήν C_1 συναρτήσει τῆς στρεπτικῆς ροπῆς M_t. ῎Αν A_1 τό ἐμβαδό, πού περικλείεται ἀπό τόν κύκλο Γ_1, θά ἔχουμε: $M_t = 2 \cdot C_1 \cdot A_1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{M_t}{2 \cdot A_1}$, ὁπότε θά εἶναι $\tau_{(\phi)} = \dfrac{M_t}{2 \cdot A_1 \cdot \delta_{(\phi)}}$.

Ἡ ἀνά μονάδα μήκους γωνία στροφῆς Θ θά βρεθεῖ ἀπό τή σχέση

$$\oint_{\Gamma_1} \tau_{(\phi)} \cdot ds = 2 \cdot G \cdot \Theta \cdot A_1 \Rightarrow \oint_{\Gamma_1} \frac{M_t}{2 \cdot \delta_{(\phi)} \cdot A_1} \cdot ds = 2 \cdot G \cdot \Theta \cdot A_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{\oint_{\Gamma_1} \dfrac{M_t}{2 \cdot \delta_{(\phi)} \cdot A_1} \cdot ds}{2 \cdot G \cdot A_1}.$$

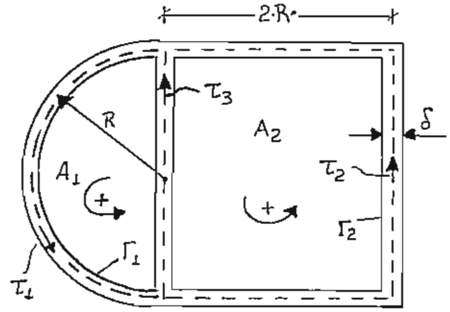
Ἡ στρεπτική δυσκαμψία D εἶναι: $D = \dfrac{M_t}{\Theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D = \frac{M_t}{\dfrac{\oint_{\Gamma_1} \dfrac{M_t}{2 \cdot \delta_{(\phi)} \cdot A_1} \cdot ds}{2 \cdot G \cdot A_1}} \Rightarrow D = \frac{2 \cdot G \cdot A_1}{\oint_{\Gamma_1} \dfrac{ds}{2 \cdot \delta_{(\phi)} \cdot A_1}} \Rightarrow D = \frac{2 \cdot G \cdot A_1}{\dfrac{1}{2 \cdot A_1} \cdot \oint_{\Gamma_1} \dfrac{R \cdot d\phi}{\delta_o\left(1 + \sin\frac{\phi}{2}\right)}} =$$

$$\Rightarrow D = \frac{4 \cdot G \cdot A_1^2}{\oint_{\Gamma_1} \dfrac{R \cdot d \cdot \phi}{\delta_o \cdot \left(1 + \sin\frac{\phi}{2}\right)}} \Rightarrow D = \frac{4 \cdot G \cdot (\pi \cdot R^2)^2}{\dfrac{4 \cdot R}{\delta_o}} \Rightarrow D = G \cdot \delta_o \cdot \pi^2 \cdot R^3,$$

ὅπου θεωρήσαμε ὅτι κατά προσέγγιση εἶναι $A_1 = \pi \cdot R^2$.

ασκηση 5



Νά βρεθεῖ ἡ στρεπτική δυσκαμψία $D = \frac{M_t}{\theta}$ τοῦ λεπτόπαχου σωλήνα τοῦ σχήματος. Ὅλοι οἱ κλάδοι ἔχουν τό ἴδιο σταθερό πάχος δ.

υποδειξη: Νά χρησιμοποιηθοῦν τά συμπεράσματα τῆς θεωρίας τοῦ ἀναλόγου μεμβράνης μέ ἐσωτερικές ὀπές.

λυση

Ὁρίζουμε γιά κάθε ὀπή τή θετική φορά περιφορᾶς της. Δίνουμε αὐθαίρετες φορές στίς διατμητικές τάσεις κάθε κλάδου. Στό πρόβλημα αὐτό ἔχουμε 3 κλάδους.

Θά χρησιμοποιήσουμε τήν ἐξίσωση $\tau = \frac{c}{\delta}$ γιά τούς ἀκραίους κλάδους. Ἔτσι $\tau_1 = \frac{c_1}{\delta}$ (1), $\tau_2 = \frac{c_2}{\delta}$ (2), ὅπου c_1, c_2 οἱ τιμές τῆς τασικῆς συνάρτησης F, πού λύνει τό πρόβλημα, κατά μῆκος τῶν περιγραμμάτων Γ_1, Γ_2 ἀντίστοιχα.

Θά χρησιμοποιήσουμε γιά τό μεσαῖο κλάδο τήν ἐξίσωση $\tau = \frac{c_{j+1} - c_j}{\delta}$. Στόν ἀριθμητή τοῦ κλάσματος θά πάρουμε πρῶτα τήν τιμή C γιά τό περίγραμμα τῆς ὀπῆς ἐκείνης, γιά τήν ὁποία ἡ θετική φορά περιφορᾶς συμπίπτει μέ τή φορά τοῦ τ. Ἔτσι θά ἔχουμε: $\tau_3 = \frac{c_1 - c_2}{\delta}$ (3).

Θά χρησιμοποιήσουμε γιά κάθε ὀπή τήν ἐξίσωση: $\oint_\Gamma \tau \cdot ds = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A$, ὅπου A τό ἐμβαδό τῆς ὀπῆς. Τό ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα γιά ἕνα κλάδο θά παίρνεται θετικό, ὅταν ἡ θετική φορά διαγραφῆς τοῦ S (ἀντιωρολογιακή) συμπίπτει μέ τή φορά τοῦ τ γιά τόν κλάδο αὐτό. Ἔτσι γιά τήν ἀριστερή ὀπή θά ἔχουμε:

$$\oint_{\Gamma_1} \tau \cdot ds = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A_1 \Rightarrow \tau_1 \cdot \pi \cdot R + \tau_3 \cdot 2 \cdot R = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_1 \cdot \pi \cdot R + 2 \cdot \tau_3 \cdot R = G \cdot \theta \cdot \pi \cdot R^2 \quad (4).$$

Γιά τή δεξιά όπή θά έχουμε:

$$\oint_{\Gamma_2} \tau \cdot ds = 2 \cdot G\, \Theta \cdot A_2 \Rightarrow \tau_2 \cdot 6 \cdot R - \tau_3 \cdot 2 \cdot R = 2 \cdot G \cdot \Theta \cdot (4 \cdot R^2) \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow 6 \cdot \tau_2 \cdot R - 2 \cdot \tau_3 \cdot R = 8 \cdot G \cdot \Theta \cdot R^2 \quad (5).$$

Θά χρησιμοποιήσουμε, τέλος, καί τήν έξίσωση $M_t = 2 \cdot \Sigma C_i A_i$.
Γιά τό πρόβλημά μας έχουμε:

$$M_t = 2 \cdot (C_1 \cdot A_1 + C_2 \cdot A_2) = 2 \left(C_1 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} + C_2 \cdot 4R^2\right) \Rightarrow M_t = C_1 \cdot \pi \cdot R^2 + 8 \cdot C_2 \cdot R^2 \quad (6)$$

Θά βροῦμε ἀπό τίς ἐξισώσεις (1), (2), (3), (4), (5) τίς τιμές τῶν C_1, C_2 συναρτήσει τῆς ἀνά μονάδας μήκους γωνίας στροφῆς Θ. Θά ἀντικαταστήσουμε ἔπειτα τίς τιμές αὐτές στήν (6) καί ἔτσι θά βροῦμε τή Θ συναρτήσει τῆς στρεπτικῆς ροπῆς M_t.

Ἀντικαθιστώντας τίς τιμές τῶν (1) καί (2) στήν (3) παίρνουμε:
$\tau_3 = \dfrac{(\tau_1 - \tau_2) \cdot \delta}{\delta} \Rightarrow \tau_3 = \tau_1 - \tau_2$. Ἀντικαθιστώντας αὐτήν τήν τιμή τοῦ τ_3 στίς (4) καί (5) παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1 \cdot \pi \cdot R + 2 \cdot (\tau_1 - \tau_2) \cdot R = G \cdot \Theta \cdot \pi \cdot R^2 \\ 6 \cdot \tau_2 \cdot R - 2 \cdot (\tau_1 - \tau_2) \cdot R = 8 \cdot G \cdot \Theta \cdot R^2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \tau_1 \cdot R \cdot (\pi + 2) - 2 \cdot \tau_2 \cdot R = G \cdot \Theta \cdot \pi \cdot R^2 \\ -2 \cdot \tau_1 \cdot R + 8 \cdot \tau_2 \cdot R = 8 \cdot G \cdot \Theta \cdot R^2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi + 4}{2\pi + 3} \cdot G \cdot \Theta \cdot R \qquad\qquad C_1 = \frac{2\pi + 4}{2\pi + 3} \cdot G \cdot \Theta \cdot R \cdot \delta$$

ὁπότε

$$\tau_2 = \frac{5\pi + 8}{2 \cdot (2\pi + 3)} \cdot G \cdot \Theta \cdot R \qquad\qquad C_2 = \frac{5\pi + 8}{2 \cdot (2\pi + 3)} \cdot G \cdot \Theta \cdot R \cdot \delta$$

καί μέ ἀντικατάσταση στήν (6):

$$M_t = \frac{2\pi + 4}{2\pi + 3} \cdot G \cdot \Theta \cdot R \cdot \delta \cdot \pi \cdot R^2 + 8 \cdot \frac{5\pi + 8}{2 \cdot (2\pi + 3)} \cdot G \cdot \Theta \cdot R \cdot \delta \cdot R^2 \Rightarrow$$

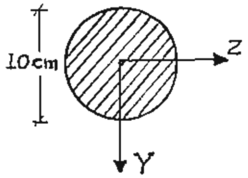
$$\Rightarrow M_t = G \cdot \Theta \cdot R^3 \cdot \delta \cdot \left(\frac{2\pi^2 + 24\pi + 32}{2\pi + 3}\right)$$

Ἡ στρεπτική δυσκαμψία D εἶναι:

$$D = \frac{M_t}{\Theta} \Rightarrow D = G \cdot R^3 \cdot \delta \cdot \left(\frac{2\pi^2 + 24\pi + 32}{2\pi + 3}\right) \Rightarrow D = 13{,}695 \cdot G \cdot R^3 \cdot \delta$$

ασκηση 6

Θεωροῦμε τήν πακτωμένη δοκό τοῦ σχήματος, ἡ ὁποία ἔχει κυκλική διατομή διαμέτρου 10 cm. Ἡ δοκός



δέχεται στό ἐλεύθερο ἄκρο της τή στρεπτική ροπή $M_t = 8\ kNm$ καί τήν ἀξονική θλιπτική δύναμη $F = 200\ kN$. Νά βρεθεῖ ἡ μέγιστη διατμητική τάση, πού ἀναπτύσσεται στή δοκό.

λυση

Ἡ μέγιστη διατμητική τάση λόγω στρέψης θά ἀναπτυχθεῖ κοντά στό περίγραμμα τῆς διατομῆς καί εἶναι:

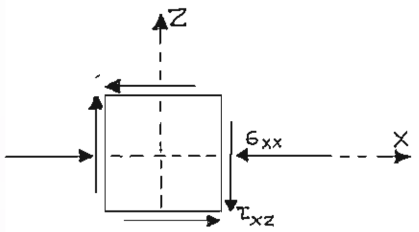
$$\tau = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} \Rightarrow \tau = \frac{16 \cdot 8 \cdot 10^3\ Nm}{\pi \cdot (10^{-1}\ m)^3} = 40,74 \cdot 10^6\ N/m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = 40,74\ MN/m^2.$$

Ἡ ὀρθή τάση θλίψης λόγω τῆς ἀξονικῆς δύναμης F εἶναι:

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \Rightarrow \sigma_{xx} = -\frac{200 \cdot 10^3\ N}{\frac{\pi}{4} \cdot (10^{-1}\ m)^2} = -25,46 \cdot 10^6\ N/m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx} = -25,46\ MN/m^2.$$

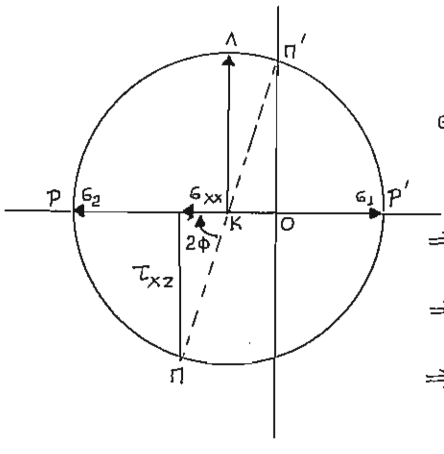


Γιά ἕνα σημεῖο, ἑπομένως, πού βρίσκεται στό περίγραμμα μιᾶς διατομῆς τῆς δοκοῦ, ἡ ἐντατική κατάσταση ἐκφράζεται ἀπό τίς ἀκόλουθες τιμές τάσεων:

$\sigma_{xx} = -25,46\ MN/m^2$, $\sigma_{zz} = 0$,

$\tau_{xz} = -40,74\ MN/m^2$. *

Θά βροῦμε τίς κύριες τάσεις καί ἀπό αὐτές τή μέγιστη διατμητική τάση. Εἶναι:



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{-25,46}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{25,46}{2}\right) + (-40,74)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = -12,73 \pm 42,68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 29,95\ MN/m^2$$

$$\sigma_2 = -55,4\ MN/m^2.$$

---

* Ἡ φορά τῆς τ_{xz} προκύπτει ἀπό τήν παρατήρηση ὅτι οἱ διατμητικές τάσεις, πού προκαλοῦνται πάνω στή διατομή λόγω στρέψης, πρέπει νά ἔχουν τέτοια φορά, ὥστε ἡ ροπή πού θά προκαλέσουν νά ἔχει τή φορά τῆς στρεπτικῆς ροπῆς M_t.

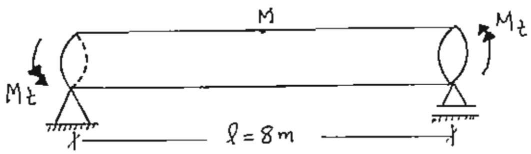
Τό κύριο σύστημα ἀντιστοιχεῖ σέ γωνία στροφῆς ϕ, πού δίνεται ἀπό τή σχέση $\tan 2\phi = \dfrac{2\cdot \tau_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \Rightarrow \tan 2\phi = \dfrac{2\cdot(-40,74)}{-25,46} = 3,2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \phi = 36{,}3^{\circ}$.

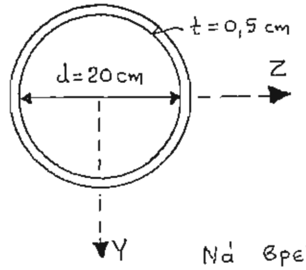
Ἡ μέγιστη διατμητική τάση, πού ἀναπτύσσεται στή δοκό, παριστάνεται στόν κύκλο τοῦ Mohr ἀπό τό τμῆμα ΚΛ. Εἶναι: $\tau_{max.} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

$$\Rightarrow \tau_{max.} = \frac{29,95 + 55,40}{2} \Rightarrow \tau_{max} = 42,68 \ MN/m^2.$$

Ἡ γραφική κατασκευή τοῦ Mohr ἔγινε ὡς ἑξῆς:
Στήν τετμημένη τῆς κατ' ἀπόλυτη τιμή μεγαλύτερης ὀρθῆς τάσης (σ_{xx}) παίρνουμε κατά τόν ἄξονα τῶν διατμητικῶν τάσεων τμῆμα ἴσο μέ τή διατμητική τάση τ_{xz}. Στήν τετμημένη τῆ ἄλλης ὀρθῆς τάσης (τῆς σ_{zz}, πού εἶναι μηδενική καί, συνεπῶς, κατ' ἀπόλυτη τιμή μικρότερη) παίρνουμε σύμφωνα μέ τή σύμβαση τμῆμα ἴσο μέ $-\tau_{xz}$. Ὁρίζεται ἔτσι ἡ διάμετρος ΠΚΠ' τοῦ κύκλου Mohr. Στρέφοντας δεξιόστροφα κατά γωνία 2ϕ τήν ἀκτίνα ΚΠ, [πού ἀντιστοιχεῖ στήν κατ' ἀπόλυτη τιμή μεγαλύτερη ἀπό τίς ὀρθές τάσεις τοῦ συστήματος (x, z)], παίρνουμε τήν ἀκτίνα ΚΡ, πού ἀντιστοιχεῖ στήν κατ' ἀπόλυτη τιμή μεγαλύτερη ἀπό τίς κύριες τάσεις σ_2.
(πρβλ. καί κεφάλαιο 1, σελίδα 14).

ασκηση 7





Ὁ σωλήνας τοῦ σχήματος μέ ἐσωτερική διάμετρο d = 20 cm καί πάχος τοιχώματος t = 0,5 cm εἶναι κλειστός στά δύο ἄκρα, στηρίζεται σάν ἀμφιέρειστη δοκός καί δέχεται τά ἑξῆς φορτία:
α. ροπή στρέψης $M_t = 1000$ kpm
β. ἐσωτερική πίεση $p = 30 \ kp/cm^2$
γ. ἴδιο βάρος $q = 60$ kp/m

Νά βρεθοῦν:
1) ἡ μέγιστη διατμητική τάση λόγω στρέψης,
2) οἱ τάσεις, πού προκαλοῦνται ἀπό τήν ἐσωτερική πίεση p,
3) ἡ μέγιστη ὀρθή τάση λόγω κάμψης, πού προκαλεῖται ἀπό τό ἴδιο βάρος τοῦ σωλήνα,
4) οἱ κύριες τάσεις στό σημεῖο M, πού βρίσκεται στό μέσο τοῦ σωλήνα καί στήν ἀνώτερη γενέτειρά του.

λυση

α. Ἡ μέγιστη διατμητική τάση λόγω στρέψης θά ἀναπτυχθεῖ κοντά στό περίγραμμα τῆς διατομῆς καί εἶναι : $\tau^{Mt}_{max.} = \dfrac{16 \cdot M_t \cdot (d+2t)}{\pi \cdot [(d+2t)^4 - d^4]}$ (πρβλ. σελίδα **100**, σωληνωτή κυκλική διατομή). Ἔχουμε λοιπόν :

$$\tau^{Mt}_{max.} = \frac{16 \cdot 1000 \cdot 10^2 \text{ kp}\cdot\text{cm} \cdot 21 \text{ cm}}{\pi \cdot (21^4 - 20^4) \text{ cm}^4} \Rightarrow \tau^{Mt}_{max.} = 310,18 \text{ kp/cm}^2$$

β. Οἱ τάσεις, πού προκαλοῦνται ἀπό τήν ἐσωτερική πίεση p, εἶναι :

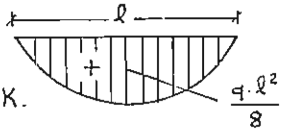
$$\sigma^{p}_{xx} = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t} \Rightarrow \sigma^{p}_{xx} = \frac{30 \text{ kp/cm}^2 \cdot 10 \text{ cm}}{2 \cdot 0,5 \text{ cm}} = 300 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma^{p}_{zz} = \frac{p \cdot r}{t} \Rightarrow \sigma^{p}_{zz} = \frac{30 \text{ kp/cm}^2 \cdot 10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 600 \text{ kp/cm}^2.$$

(πρβλ. ἄσκηση 7, σελίδα **29**).

γ. Ἡ μέγιστη ὀρθή τάση λόγω κάμψης εἶναι : $\sigma^{M}_{xx\,max.} = \dfrac{M_{max.} \cdot y_{max}}{I_{zz}}$

Δ.Ρ.Κ.



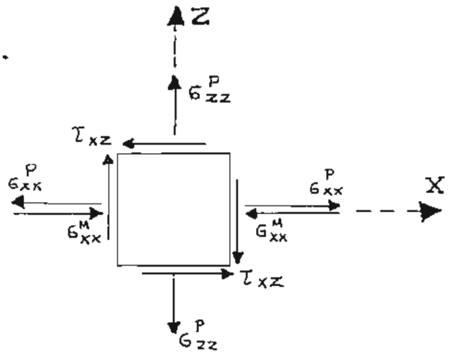
Ἡ μέγιστη καμπτική ροπή παρουσιάζεται στό μέσο τῆς δοκοῦ καί εἶναι $M_{max.} = \dfrac{q \cdot \ell^2}{8}$. Ἡ ροπή ἀδράνειας I_{zz} εἶναι : $I_{zz} = \dfrac{\pi}{4} \cdot \left(r^4_{εξ.} - r^4_{εσ.} \right) = \dfrac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\dfrac{d}{2} + t\right)^4 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^4 \right]$.

Ἡ μέγιστη ὀρθή τάση, λοιπόν, εἶναι :

$$\sigma^{M}_{xx\,max.} = \frac{\frac{q \cdot \ell^2}{8} \cdot \left(\frac{d}{2} + t\right)}{\frac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\frac{d}{2} + t\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right]} \Rightarrow \sigma^{M}_{xx\,max.} = \frac{\frac{60}{100} \frac{\text{kp}}{\text{cm}} \cdot (8 \cdot 10^2 \text{cm})^2 \cdot 10,5 \text{ cm}}{8 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot [(10,5 \text{ cm})^4 - (10 \text{ cm})^4]}$$

$$\Rightarrow \sigma^{M}_{xx\,max.} = 297,77 \text{ kp/cm}^2.$$

δ.



Στό σημεῖο Μ ἀσκοῦνται οἱ ἑξῆς τάσεις : λόγω τῆς ροπῆς στρέψης διατμητική τάση $\tau_{xz} = -310,18$ kp/cm² λόγω τῆς ἐσωτερικῆς πίεσης p ὀρθή ἐφελκυστική τάση $\sigma^P_{xx} = +300$ Kp/cm² καί ὀρθή ἐφελκυστική τάση $\sigma^P_{zz} = +600$ Kp/cm² · λόγω κάμψης ὀρθή θλιπτική τάση $\sigma^M_{xx} = -297,77$ kp/cm².

Ἡ ὀρθή τάση ἐπομένως στήν κατεύθυνση X εἶναι $\sigma_{XX} = \sigma_{XX}^{M} + \sigma_{XX}^{P} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sigma_{XX} = 2,23 \ Kp/cm^2$. Ἡ ὀρθή τάση στήν κατεύθυνση Z εἶναι: $\sigma_{ZZ} = \sigma_{ZZ}^{P} \Rightarrow \sigma_{ZZ} = 600 \ Kp/cm^2$. Τέλος, ἡ διατμητική τάση τ_{XZ} εἶναι: $\tau_{XZ} = -310,18 \ Kp/cm^2$.

Οἱ κύριες τάσεις γιά τό σημεῖο M εἶναι:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{ZZ}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{ZZ}}{2}\right)^2 + \tau_{XZ}^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{2,23 + 600}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,23 - 600}{2}\right)^2 + (-310,18)^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{1,2} = 301,1 \pm 430,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \sigma_1 & = 731,85 \ Kp/cm^2 \\ \sigma_2 & = -129,65 \ Kp/cm^2. \end{array} \right.$$

Τό κύριο σύστημα ἀντιστοιχεῖ σέ γωνία στροφῆς ϕ πού δίνεται ἀπό τή σχέση $\tan 2\phi = \dfrac{2\,\tau_{XZ}}{\sigma_{XX} - \sigma_{ZZ}} \Rightarrow \tan 2\phi = \dfrac{2\cdot(-310,18)}{2,23 - 600} = 1,03 \Rightarrow$

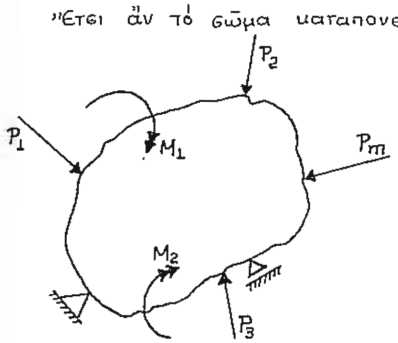
$\Rightarrow \phi = 23^{\circ},03$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ – ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CASTIGLIANO ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Θεωροῦμε ἕνα ἐλαστικό σῶμα, τό ὁποῖο παραμορφώνεται κάτω ἀπό τήν ἐπίδραση ἐξωτερικῶν φορτίων. Τό ἔργο, πού ἐκτελοῦν τά ἐξωτερικά αὐτά φορτία, ἐναποθηκεύεται στό σῶμα σάν ἐνέργεια ἐλαστικῆς παραμόρφωσης. Τήν ἐνέργεια ἐλαστικῆς παραμόρφωσης θά τήν ὀνομάζουμε στίς παραγράφους, πού ἀκολουθοῦν, γιά λόγους ἁπλότητας ἐνέργεια παραμόρφωσης.

Ἔτσι ἄν τό σῶμα καταπονεῖται ἀπό τίς ἐξωτερικές δυνάμεις $P_1, P_2, \ldots, P_m$

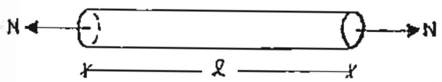


πού προκαλοῦν μετατοπίσεις τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τους ἀντίστοιχα $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ καί ἀπό τίς ἐξωτερικές ροπές $M_1, M_2, \ldots, M_n$ πού προκαλοῦν στροφές τῶν ἐπιπέδων ἐφαρμογῆς τους ἀντίστοιχα $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, τότε ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης U τοῦ σώματος κάτω ἀπό τήν ἐπίδραση αὐτῶν τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καί ροπῶν εἶναι:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} P_i \delta_i + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \phi_i$$

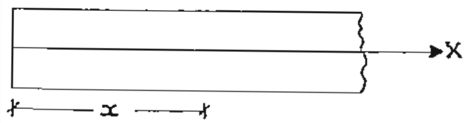
Δίνουμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά ὁρισμένες μορφές καταπόνησης:

1) Ράβδος, πού ὑπόκειται σέ ἀξονική καταπόνηση ἀπό τή δύναμη N. Ἄν ℓ



εἶναι τό μῆκος τῆς ράβδου, A τό ἐμβαδό τῆς διατομῆς της, E τό μέτρο τοῦ Young, τότε ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω ἀξονικῆς δύναμης εἶναι: $U^N = \dfrac{N^2 \cdot \ell}{2 \cdot E \cdot A}$

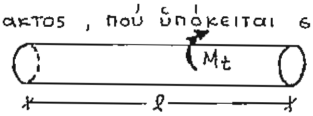
2) Δοκός, πού ὑπόκειται σέ καθαρή κάμψη. Ἄν $M(x)$ ἡ καμπτική ροπή στή



θέση x, I_{zz} ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς τῆς δοκοῦ ὡς πρός τόν ἄξονα Z, τότε ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης ἀπό 0 ἕως x λόγω κάμψης εἶναι:

$$U^M = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \int_0^x M^2(x) \cdot dx$$

3) Ἄτρακτος, πού ὑπόκειται σέ καθαρή στρέψη. Ἄν M_t εἶναι ἡ ροπή στρέψης,



ℓ τό μῆκος τῆς ἀτράκτου, D ἡ στρεπτική της δυσκαμψία, τότε ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω στρέψης εἶναι: $U^{M_t} = \dfrac{M_t^2 \cdot l}{2 \cdot D}$ (1).

Ἐπειδή ὅμως $D = I_p \cdot G$, ὅπου I_p ἡ πολική ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς καί G τό μέτρο στρέψης, ἡ (1) γράφεται: $U^{M_t} = \dfrac{M_t^2 \cdot l}{2 \cdot I_p \cdot G}$

Τό θεώρημα τοῦ Castigliano.

"Ἄν σ' ἕνα ἐλαστικό σῶμα ἐνεργοῦν δυνάμεις ἤ ζεύγη ροπῶν, τότε οἱ μετακινήσεις ἤ οἱ στροφές, πού προκαλοῦνται ἀντίστοιχα, εἶναι ἴσες μέ τή μερική παράγωγο τοῦ συνολικοῦ ἔργου παραμόρφωσης τοῦ σώματος ὡς πρός τήν ἀντίστοιχη δύναμη ἤ ροπή: $\delta_K = \dfrac{\partial U}{\partial P_K}$, $\phi_K = \dfrac{\partial U}{\partial M_K}$.

Μέ βάση τό θεώρημα αὐτό μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε ὁποιεσδήποτε μετακινήσεις ἤ στροφές σέ κάθε εἴδους φορεῖς, ὁλόσωμους ἤ δικτυωτούς.

Τό θεώρημα τοῦ Castigliano ἐφαρμόζεται ἀκόμη καί στήν περίπτωση, κατά τήν ὁποία δέν ἐνεργεῖ καμμιά ἐξωτερική δύναμη στό σημεῖο τοῦ ὁποίου ζητοῦμε τή μετακίνηση. Θεωροῦμε τότε ὅτι στό ὑπ' ὄψη σημεῖο καί κατά τή φορά, κατά τήν ὁποία ζητεῖται ἡ μετακίνηση, ἐνεργεῖ μιά ὑποθετική δύναμη H. Βρίσκουμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης U, πού προκαλεῖται ἀπό τίς ἐξωτερικές φορτίσεις καί τή δύναμη H. Ὑπολογίζουμε τήν ποσότητα $\dfrac{\partial U}{\partial H}$. Ἐπειδή ὅμως ἡ δύναμη H δέν ὑπάρχει στήν πραγματικότητα, στήν τελική ἔκφραση τῆς $\dfrac{\partial U}{\partial H}$ θέτομε $H=0$, ὁπότε ἡ ζητούμενη μετακίνηση δ εἶναι: $\delta = \left(\dfrac{\partial U}{\partial H}\right)_{H=0}$.

Ἐντελῶς ἀνάλογα βρίσκουμε καί τή γωνία στροφῆς μιᾶς διατομῆς, στήν ὁποία δέν ἐνεργεῖ ἐξωτερική ροπή. Θεωροῦμε τότε ὅτι στήν ὑπ' ὄψη διατομή ἐνεργεῖ μιά ὑποθετική ροπή M. Βρίσκουμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης, πού προκαλεῖται ἀπό τίς ἐξωτερικές φορτίσεις καί τή ροπή M. Ὑπολογίζουμε τήν ποσότητα $\dfrac{\partial U}{\partial M}$. Ἡ ζητούμενη γωνία στροφῆς τῆς ὑπ' ὄψη διατομῆς θά προκύψει, ἄν στήν τελική ἔκφραση τῆς $\dfrac{\partial U}{\partial M}$ θέσουμε $M=0$, ὁπότε εἶναι: $\phi = \left(\dfrac{\partial U}{\partial M}\right)_{M=0}$

Μέ τό θεώρημα τοῦ Castigliano μποροῦμε ἐπίσης νά ἐπιλύσουμε καί ὑπερστατικούς φορεῖς. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης U εἶναι ἐκείνη, πού προκαλεῖται ἀπό τίς ἐξωτερικές φορτίσεις καί ἀπό τά μεγέθη, πού ἔχουν χαρακτηρισθεῖ ὡς στατικά ὑπεράριθμα.

Γιά τήν ἐπίλυση ἑνός ὑπερστατικοῦ φορέα μποροῦμε ν' ἀκολουθήσουμε τήν ἑξῆς πορεία:

1) διαπιστώνουμε τόν βαθμό ὑπερστατικότητας.
2) ἐπιλέγουμε τά στατικά ὑπεράριθμα μεγέθη.

3) κάνουμε τομές στά σημεῖα ἐκεῖνα τοῦ φορέα, στά ὁποῖα θεωρήσαμε ὅτι ἐφαρμόζουν ὑπερστατικά μεγέθη, καί προσάγουμε τά μεγέθη αὐτά ὡς ἐξωτερικές φορτίσεις.

4) καταστρώνουμε τίς ἐξισώσεις συμβιβαστοῦ τῶν παραμορφώσεων. Ἡ μορφή τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν ποικίλλει ἀπό πρόβλημα σέ πρόβλημα.
Ἔτσι ἄν σ' ἕνα φορέα ἔχουμε ἕνα στερεό ὑποστήριγμα, γνωρίζουμε ἀπό πρίν ὅτι θά ἔχουμε μηδενική μετατόπιση γιά τό ὑποστήριγμα αὐτό. Ἄς εἶναι H ἡ ἀντίδραση κατά τήν κατεύθυνση τῆς μηδενικῆς αὐτῆς μετατόπισης. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ *Castigliano* θά ἔχουμε : $\frac{\partial U}{\partial H} = 0$ (1)

Ἡ ἐξίσωση (1) ἀποτελεῖ μιά ἐξίσωση συμβιβαστοῦ τῶν παραμορφώσεων. Καταστρώνουμε τόσες ἐξισώσεις συμβιβαστοῦ ὅσα καί τά στατικά ὑπεράριθμα μεγέθη, ὁπότε λύνουμε τόν ὑπερστατικό φορέα.

Τονίζουμε καί πάλι ὅτι ἡ μορφή τοῦ προβλήματος εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία θά μᾶς κατευθύνει στήν κατάστρωση τῶν ἐξισώσεων συμβιβαστοῦ τῶν παραμορφώσεων.

Στίς ἀσκήσεις 1 καί 2 μελετοῦμε θεωρητικά προβλήματα ἐνεργειακῶν μεθόδων, τά ὁποῖα οὐσιαστικά ἀποτελοῦν παραλλαγές τῶν βασικῶν θεωρημάτων τῶν μεθόδων αὐτῶν. Στίς ἀσκήσεις αὐτές χρησιμοποιοῦμε καί ὁρισμένα στοιχεῖα ἀπό τή διανυσματική ἀνάλυση.

Στίς ἀσκήσεις 3, 4, 5, 7 καί 8 ὑπολογίζουμε στροφές καί μετατοπίσεις μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος τοῦ *Castigliano*.

Στίς ἀσκήσεις 6, 9 καί 10 μελετοῦμε ὁρισμένους ἁπλούς ὑπερστατικούς φορεῖς. Στίς ἀσκήσεις αὐτές δίνεται ἰδιαίτερη ἔμφαση στίς συνθῆκες συμβιβαστοῦ, πού πρέπει νά ἱκανοποιοῦν οἱ παραμορφώσεις.

Στήν ἄσκηση 11 μελετοῦμε τήν ἐντατική κατάσταση ἑνός δικτυώματος μιά φορά ὑπερστατικοῦ, τοῦ ὁποίου μία ράβδος ἦταν κοντύτερη ἀπό τό κανονικό της μέγεθος καί συναρμόστηκε βίαια.

Τέλος στίς ἀσκήσεις 12 καί 13 ὑπολογίζουμε μετατοπίσεις καί στροφές συνθετώτερων φορέων.

ασκηση 1

Γιά ἕνα ἐλαστικό σῶμα ὄγκου V, πού περικλείεται ἀπό μιά ἐπιφάνεια S, νά ἀποδειχτεῖ ἡ σχέση:

$$\oint_S t_i \cdot x_i \cdot ds + \int_V F_i \cdot x_i \cdot dV = \frac{E}{1-2\cdot v} \cdot \delta V \quad , \text{ ὅπου}$$

t_i, F_i οἱ συνιστῶσες τῶν διανυσμάτων ἐπιφανειακῶν φορτίσεων καί μαζικῶν δυνάμεων ἀντίστοιχα, πού καταπονοῦν τό σῶμα, x_i οἱ καρτεσιανές συντεταγμένες ἑνός ὑλικοῦ σημείου τοῦ σώματος, E τό μέτρο τοῦ Young, v ὁ λόγος τοῦ Poisson καί δV ἡ συνολική αὔξηση τοῦ ὄγκου τοῦ σώματος, πού προκαλεῖται ἀπό τίς φορτίσεις t_i, F_i.

υποδειξεις: Νά χρησιμοποιηθῆ τό θεώρημα τοῦ Green, πού μετασχηματίζει ἕνα κλειστό ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα σέ τριπλό. Γιά ἕνα διανυσματικό πεδίο $\bar{a}$, πού ὁρίζεται στόν ὄγκο V, ὁ ὁποῖος περικλείεται ἀπό τήν κλειστή ἐπιφάνεια S, τό θεώρημα αὐτό ἐκφράζεται ἀπό τή σχέση

$$\oint_S \bar{n}\cdot\bar{a}\cdot ds = \int_V \operatorname{div}\bar{a}\cdot dV = \int_V \left(\frac{\partial a_m}{\partial x_m}\right)\cdot dV \quad , \text{ ὅπου}$$

$\bar{n}$ τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα σέ μιά τομή τοῦ πεδίου.

Ἐπίσης ἄν χρησιμοποιηθεῖ ἡ σχέση $Tr\underset{\sim}{\varepsilon} = \Theta = \dfrac{\delta V}{V}$, πού δίνει τήν ἀνηγμένη διόγκωση, νά γραφτεῖ γιά τήν ἐφαρμογή της στό πρόβλημα αὐτό μέ τή μορφή:

$$Tr\underset{\sim}{\varepsilon} = \Theta = \frac{d(\delta V)}{dV} \quad , \text{ ὅπου}$$

dV ὁ διαφορικός ὄγκος τοῦ σώματος καί $d(\delta V) = \delta(dV)$, ἡ μεταβολή τοῦ dV, πού συνοδεύει τήν ἐλαστική παραμόρφωση.

αποδειξη:

Οἱ συνιστῶσες τοῦ διανύσματος ἐπιφανειακῆς φόρτισης $\bar{t}$ σέ μιά τομή τοῦ σώματος, τῆς ὁποίας τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα εἶναι $\bar{n}$, δίνονται ἀπό τή σχέση $t_i = n_m \cdot \sigma_{mi}$, ὅπου n_m οἱ συνιστῶσες τοῦ διανύσματος $\bar{n}$. Θά μετασχηματίσουμε τό κλειστό ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα $\oint_S t_i \cdot x_i \cdot ds$ σέ ὁλοκλήρωμα στόν ὄγκο V (σέ τριπλό ὁλοκλήρωμα).

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Green θά ἔχουμε:

$$\oint_S t_i\cdot x_i\cdot ds = \oint_S n_m\cdot\sigma_{mi}\cdot x_i\cdot ds = \int_V \frac{\partial(\sigma_{mi}\cdot x_i)}{\partial x_m}\cdot dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial \sigma_{mi}}{\partial x_m} \cdot x_i \cdot dV + \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_m} \cdot \sigma_{mi} \cdot dV$$

Τό πρῶτο, λοιπόν, μέλος τῆς σχέσης πού ἔχουμε νά ἀποδείξουμε γράφεται:

$$A = \oint_S t_i \cdot x_i \cdot ds + \int_V F_i \cdot x_i \cdot dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{mi}}{\partial x_m} \cdot x_i \cdot dV + \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_m} \cdot \sigma_{mi} \cdot dV +$$

$$+ \int_V F_i \cdot x_i \cdot dV \Rightarrow A = \int_V \left(F_i + \frac{\partial \sigma_{mi}}{\partial x_m} \right) \cdot x_i \cdot dV + \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_m} \cdot \sigma_{mi} \cdot dV$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις ἰσορροπίας ἔχουμε ὅτι: $F_i + \dfrac{\partial \sigma_{mi}}{\partial x_m} = 0$, ἐπομένως:

$$A = \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_m} \cdot \sigma_{mi} \cdot dV \;, (1) .$$

Ἡ παράσταση $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_m}$ ἰσοῦται μέ δ_{im}, διότι ὅταν $i = m$ ἰσοῦται μέ 1, $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$, ἐνῶ ὅταν $i \neq m$ ἰσοῦται μέ 0, $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial x_m}\right)_{i \neq m} = 0$.

Ἔτσι, λοιπόν, ἡ (1) γράφεται: $A = \displaystyle\int_V \delta_{im} \cdot \sigma_{mi} \cdot dV = \int_V \sigma_{ii} \cdot dV$.

Οἱ τάσεις ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν παραμορφώσεων ἀπό τή σχέση: $\sigma_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \Theta \cdot \delta_{ij}$, ὅπου $\Theta = Tr\,\underset{\sim}{\varepsilon}$ ἡ ἀνηγμένη διόγκωση

καί λ, μ οἱ σταθερές τοῦ Lamé. Γιά $i = j$ ἔχουμε $\sigma_{ii} = 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ii} + \lambda \cdot \Theta \cdot \delta_{ii} = 2 \cdot \mu \cdot \Theta + 3 \cdot \lambda \cdot \Theta \Rightarrow \sigma_{ii} = (2\mu + 3\lambda) \cdot \Theta$ καί ἐπομένως

$$A = \int_V \sigma_{ii} \cdot dV = \int_V (2 \cdot \mu + 3 \cdot \lambda) \cdot \Theta \cdot dV \;, (2) .$$

Τήν ἀνηγμένη διόγκωση τή γράφουμε μέ τή μορφή: $\Theta = Tr\,\underset{\sim}{\varepsilon} = \dfrac{d(\delta V)}{dV}$, ὁπότε ἡ (2) γράφεται:

$$A = \int_V (2 \cdot \mu + 3 \cdot \lambda) \cdot \frac{d(\delta V)}{dV} \cdot dV = \int_V (2 \cdot \mu + 3 \cdot \lambda) \cdot d(\delta V)$$

Τά σύμβολα $\int$, d γραμμένα τό ἕνα μετά ἀπό τό ἄλλο ἀλληλοαναιροῦνται καί $A = (2 \cdot \mu + 3 \cdot \lambda) \cdot \delta V$, (3).

Οἱ σταθερές λ, μ ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν E, v ἀπό τίς σχέσεις:

$$\lambda = \frac{v \cdot E}{(1-2v)(1+v)} \;, \quad \mu = \frac{E}{2 \cdot (1+v)} \;.$$

Ἡ σχέση, λοιπόν, πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε, γράφεται τελικά:

$$A = (2 \cdot \mu + 3 \cdot \lambda) \cdot \delta V = \left[\frac{2 \cdot E}{2 \cdot (1+v)} + \frac{3 \cdot v \cdot E}{(1-2v)(1+v)} \right] \cdot \delta V =$$

$$= \frac{E\cdot(1-2\cdot\nu)+3\cdot\nu\cdot E}{(1-2\cdot\nu)\cdot(1+\nu)}\cdot\delta V = \frac{E-2\cdot\nu\cdot E+3\cdot\nu\cdot E}{(1-2\cdot\nu)\cdot(1+\nu)}\cdot\delta V = \frac{E+\nu\cdot E}{(1-2\cdot\nu)\cdot(1+\nu)}\cdot\delta V =$$

$$= \frac{E\cdot(1+\nu)}{(1-2\cdot\nu)\cdot(1+\nu)}\cdot\delta V \Rightarrow A = \frac{E}{1-2\cdot\nu}\cdot\delta V \text{ , ἄρα}$$

$$\oint_S t_i\cdot x_i\cdot ds + \int_V F_i\cdot x_i\cdot dV = \frac{E}{1-2\cdot\nu}\cdot dV \ .$$

ασκηση 2

Γιά ἕνα ἐλαστικό σῶμα ἡ ἀνηγμένη ἐνέργεια παραμόρφωσης W δίνεται ἀπό τή σχέση $W = \frac{1}{2}\cdot\sigma_{ij}\cdot\varepsilon_{ij}$. Ἄν θ καί φ ἡ πρώτη καί δεύτερη ἀναλλοίωτη ἀντίστοιχα τοῦ τανυστῆ τάσης, $\theta = Tr\underset{\sim}{\sigma}$, $\phi = Tr\underset{\sim}{\sigma}^2$, **Θ** καί **Φ** ἡ πρώτη καί δεύτερη ἀναλλοίωτη ἀντίστοιχα τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης, $\Theta = Tr\underset{\sim}{\varepsilon}$, $\Phi = Tr\underset{\sim}{\varepsilon}^2$, λ καί μ οἱ σταθερές τοῦ Lamé, νά ἐκφρασθεῖ ἡ W :

α. συναρτήσει τῶν θ, φ, λ, μ.
β. συναρτήσει τῶν **Θ**, **Φ**, λ, μ.

λυση

Ἄν $\underset{\sim}{\sigma}$ καί $\underset{\sim}{\varepsilon}$ οἱ τανυστές τάσης καί παραμόρφωσης ἀντίστοιχα, θά ἀποδείξουμε πρῶτα ὅτι: $\sigma_{ij}\cdot\varepsilon_{ij} = Tr(\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon})$. Ἔχουμε:

$(\sigma\cdot\varepsilon)_{ij} = \sigma_{im}\cdot\varepsilon_{mj}$, ὁπότε $Tr(\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma_{im}\cdot\varepsilon_{mi}$, καί ἐπειδή

$\varepsilon_{mi} = \varepsilon_{im}$ θά εἶναι : $Tr(\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma_{im}\cdot\varepsilon_{im}$. Στή σχέση αὐτή τό m εἶναι ἐπαναλαμβανόμενος (ἄεργος) δείκτης· μποροῦμε ἑπομένως νά ἀντικαταστήσουμε τό m μέ j, ὁπότε : $Tr(\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma_{ij}\cdot\varepsilon_{ij}$.

Ἐξ ἄλλου ὁ τανυστής τάσης ἐκφράζεται συναρτήσει τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης ἀπό τή σχέση:

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\cdot\mu\cdot\underset{\sim}{\varepsilon} + \lambda\cdot(Tr\,\underset{\sim}{\varepsilon})\cdot\underset{\sim}{I}, \text{ ὅπου}$$

λ, μ οἱ σταθερές τοῦ Lamé καί $\underset{\sim}{I}$ τό μοναδιαῖο μητρῶο.

Ἀντίστοιχα ὁ τανυστής παραμόρφωσης ἐκφράζεται συναρτήσει τοῦ τανυστῆ τάσης ἀπό τή σχέση:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\underset{\sim}{\sigma} - \frac{\lambda}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\sigma}\right)\cdot\underset{\sim}{I}$$

α. Θά έκφράσουμε τήν άνηγμένη ένέργεια παραμόρφωσης W συναρτήσει τών άναλλοιώτων τοῦ τανυστῆ τάσης $\underset{\sim}{\sigma}$. Εἶναι:

$$\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\sigma}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\underset{\sim}{\sigma} - \frac{\lambda}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\sigma}\right)\cdot\underset{\sim}{I}\right] = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\underset{\sim}{\sigma}^2 - \frac{\lambda}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\sigma}\right)\cdot\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{I} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\underset{\sim}{\sigma}^2 - \frac{\lambda}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\sigma}\right)\cdot\underset{\sim}{\sigma} \quad , \text{διότι} \quad \underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{\sigma}$$

Ἡ άνηγμένη, λοιπόν, ένέργεια παραμόρφωσης W εἶναι:

$$W = \frac{1}{2}\cdot\sigma_{ij}\cdot\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\cdot Tr\left(\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\cdot Tr\left[\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\underset{\sim}{\sigma}^2 - \frac{\lambda}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\sigma}\right)\cdot\underset{\sim}{\sigma}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\sigma}^2\right) - \frac{\lambda}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\sigma}\right)\left(Tr\underset{\sim}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\phi - \frac{\lambda'}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot\theta\cdot\theta\right]$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\phi - \frac{\lambda}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot\theta^2$$

β. Θά έκφράσουμε τήν άνηγμένη ένέργεια παραμόρφωσης W συναρτήσει τών άναλλοιώτων τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης $\underset{\sim}{\varepsilon}$. Εἶναι:

$$\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon} = \left[2\cdot\mu\cdot\underset{\sim}{\varepsilon} + \lambda\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\right)\cdot\underset{\sim}{I}\right]\cdot\underset{\sim}{\varepsilon} = 2\cdot\mu\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}^2 + \lambda\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\right)\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\underset{\sim}{I} =$$

$$= 2\cdot\mu\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}^2 + \lambda\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\right)\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}\,.$$

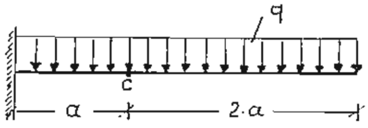
Ἡ άνηγμένη, λοιπόν, ένέργεια παραμόρφωσης W εἶναι:

$$W = \frac{1}{2}\cdot\sigma_{ij}\cdot\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\cdot Tr\left(\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\,Tr\left[2\cdot\mu\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}^2 + \lambda\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\right)\cdot\underset{\sim}{\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot\mu\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}^2\right) + \lambda\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\right)\cdot\left(Tr\underset{\sim}{\varepsilon}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot\mu\cdot\Phi + \lambda\cdot\Theta\cdot\Theta\right] \Rightarrow$$

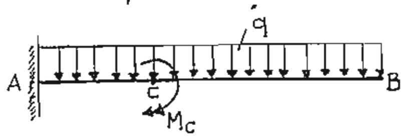
$$\Rightarrow W = \mu\cdot\Phi + \frac{\lambda\cdot\Theta^2}{2}$$

ασκηση 3



Γιά τόν πρόβολο τοῦ σχήματος, πού δέχεται τήν όμοιόμορφη φόρτιση q, νά βρεθεῖ ή στροφή τοῦ σημείου C μέ έφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Castigliano.

λυση



Θεωροῦμε ὅτι στό σημεῖο C τοῦ προβόλου ἐφαρμόζει τό ζεῦγος ροπῶν M_C. Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης U, πού προκαλεῖται ἀπό τήν ἐξωτερική φόρτιση q καί τή ροπή M_C. Ἡ στροφή ϕ_C τοῦ σημείου C θά εἶναι ἴση μέ τή μερική παράγωγο τῆς U ὡς πρός M_C, ὅπου ὅμως στήν τελική ἔκφραση τῆς $\frac{\partial U}{\partial M_C}$ θά θέσουμε $M_C = 0$, διότι στήν πραγματικότητα δέν ὑπάρχει ροπή M_C· θά εἶναι δηλαδή $\phi_C = \left(\frac{\partial U}{\partial M_C}\right)_{M_C=0}$

Στό τμῆμα BC ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό σημεῖο B εἶναι: $M_{BC}(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2}$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι: $U_{BC} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \int_0^{2\alpha} M_{BC}^2(x) \cdot dx$.

Στό τμῆμα CA ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό σημεῖο B εἶναι: $M_{CA}(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2} - M_C$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι: $U_{CA} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \int_{2\alpha}^{3\alpha} M_{CA}^2(x) \cdot dx$.

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης εἶναι:

$$U = U_{BC} + U_{CA} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \left[\int_0^{2\alpha} M_{BC}^2(x) \cdot dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} M_{CA}^2(x) \cdot dx \right]$$

Ἡ μερική παράγωγος τῆς U ὡς πρός M_C εἶναι:

$$\frac{\partial U}{\partial M_C} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \left[\int_0^{2\alpha} \frac{\partial M_{BC}^2(x)}{\partial M_C} \cdot dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{\partial M_{CA}^2(x)}{\partial M_C} \cdot dx \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_C} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \left[\int_0^{2\alpha} 2 \cdot M_{BC}(x) \cdot \frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial M_C} \cdot dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} 2 \cdot M_{CA}(x) \cdot \frac{\partial M_{CA}(x)}{\partial M_C} \cdot dx \right]$$

Εἶναι: $\frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial M_C} = 0$, $\frac{\partial M_{CA}(x)}{\partial M_C} = -1$, ὁπότε

$$\frac{\partial U}{\partial M_C} = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \left[\int_0^{2\alpha} M_{BC}(x) \cdot 0 \cdot dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} M_{CA}(x)(-1) \cdot dx \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial M_c} = -\frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \int_{2a}^{3a} M_{CA}(x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial M_c} = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \int_{2a}^{3a} \left(\frac{q \cdot x^2}{2} + M_c \right) . dx .$$

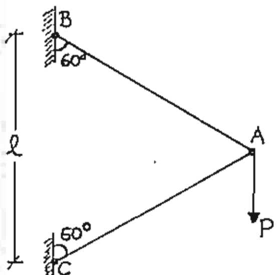
Ἡ γωνία στροφῆς ϕ_c θά προκύψει, ἄν σ' αὐτή τήν τελική ἔκφραση τῆς $\frac{\partial U}{\partial M_c}$ θέσουμε $M_c = 0$. Θά εἶναι λοιπόν:

$$\phi_c = \left(\frac{\partial U}{\partial M_c} \right)_{M_c = 0} \Rightarrow \phi_c = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \int_{2a}^{3a} \left(\frac{q \cdot x^2}{2} + 0 \right) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\phi_c = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \int_{2a}^{3a} \frac{q \cdot x^2}{2} \cdot dx \Rightarrow \phi_c = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{2a}^{3a} \Rightarrow$$

$$\phi_c = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \left(\frac{27 \cdot a^3}{3} - \frac{8 \cdot a^3}{3} \right) \Rightarrow \phi_c = \frac{19}{6} \cdot \frac{q \cdot a^3}{E \cdot I_{zz}} .$$

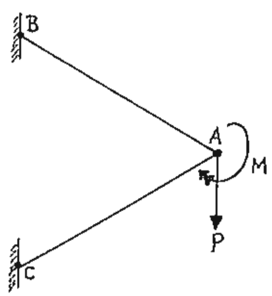
ασκηση 4



Στό σύστημα τοῦ σχήματος νά βρεθεῖ ἡ γωνία στροφῆς τῆς ράβδου AB, πού προκαλεῖται ἀπό τό κατακόρυφο φορτίο P.

Νά θεωρηθεῖ ὅτι οἱ 2 ράβδοι ἔχουν ἴδιο ἐμβαδό διατομῆς A καί μέτρο ἐλαστικότητας E.

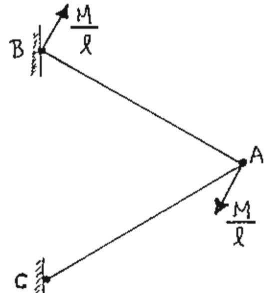
λυση



Θεωροῦμε ὅτι στό A ἐφαρμόζει τό ζεῦγος ροπῶν M. Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης U τοῦ συστήματος, πού προκαλεῖται ἀπό τίς φορτίσεις P καί M. Ἡ γωνία στροφῆς τῆς ράβδου AB θά εἶναι ἴση μέ τή μερική παράγωγο τῆς U ὡς πρός M, ὅπου στήν τελική ἔκφραση θέτομε M=0, διότι ἡ ροπή M δέν ὑπάρχει στήν πραγματικότητα, $\phi_{AB} = \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{M=0}$

Οἱ τάσεις τῶν ράβδων AB καί AC, πού προκαλοῦνται ἀπό τή φόρτιση P, εἶναι:

$$S_{AB}^{P} = +P \quad , \quad S_{AC}^{P} = -P$$



Γιά νά βροῦμε τίς τάσεις τῶν ράβδων AB καί AC, πού προκαλοῦνται ἀπό τή ροπή M, θεωροῦμε ὅτι ἡ M παράγεται ἀπό 2 ἀντίρροπες δυνάμεις, ἴσες τήν καθεμιά μέ M/ℓ, πού ἐφαρμόζουν στά σημεῖα A καί B. Ἀπό τήν ἰσορροπία δυνάμεων στό A βρίσκουμε: $S_{AB}^{M} = \frac{M}{\sqrt{3}\cdot\ell}$, $S_{AC}^{M} = -\frac{2\cdot M}{\sqrt{3}\cdot\ell}$.

Οἱ τάσεις, λοιπόν, τῶν ράβδων τοῦ συστήματος, πού προκαλοῦνται ἀπό τίς φορτίσεις P καί M, εἶναι:

$$S_{AB} = S_{AB}^{P} + S_{AB}^{M} = P + \frac{M}{\sqrt{3}\cdot\ell}$$

$$S_{AC} = S_{AC}^{P} + S_{AC}^{M} = -P - \frac{2\cdot M}{\sqrt{3}\cdot\ell}$$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης τῆς ράβδου AB εἶναι:

$$U_{AB} = \frac{S_{AB}^2\cdot \ell_{AB}}{2\cdot E\cdot A} = \frac{S_{AB}^2\cdot \ell}{2\cdot E\cdot A}.$$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης τῆς ράβδου AC εἶναι:

$$U_{AC} = \frac{S_{AC}^2\cdot \ell_{AC}}{2\cdot E\cdot A} = \frac{S_{AC}^2\cdot \ell}{2\cdot E\cdot A}$$

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης τοῦ συστήματος εἶναι:

$$U = U_{AB} + U_{AC} \Rightarrow U = \frac{S_{AB}^2\cdot\ell}{2\cdot A\cdot E} + \frac{S_{AC}^2\cdot\ell}{2\cdot A\cdot E}$$

Ἔχουμε: $$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\frac{\partial S_{AB}^2}{\partial M}\cdot\ell}{2\cdot A\cdot E} + \frac{\frac{\partial S_{AC}^2}{\partial M}\cdot\ell}{2\cdot A\cdot E} = \frac{2\cdot S_{AB}\cdot\frac{\partial S_{AB}}{\partial M}\cdot\ell}{2\cdot A\cdot E} + \frac{2\cdot S_{AC}\cdot\frac{\partial S_{AC}}{\partial M}\cdot\ell}{2\cdot A\cdot E}$$

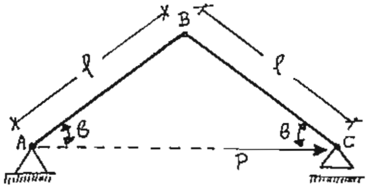
$$\frac{\partial S_{AB}}{\partial M} = \frac{1}{\ell\cdot\sqrt{3}} \quad , \quad \frac{\partial S_{AC}}{\partial M} = -\frac{2}{\ell\cdot\sqrt{3}} \quad , \text{ ὁπότε}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\left(P + \frac{M}{\ell\cdot\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\ell\cdot\sqrt{3}}\cdot\ell}{A\ E} + \frac{\left(-P - \frac{2\cdot M}{\ell\cdot\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\ell\cdot\sqrt{3}}\right)\cdot\ell}{A\cdot E} \qquad (1)$$

Ἡ γωνία στροφῆς ϕ_{AB} θά προκύψει, ἄν στήν (1) θέσουμε $M=0$, ὁπότε:

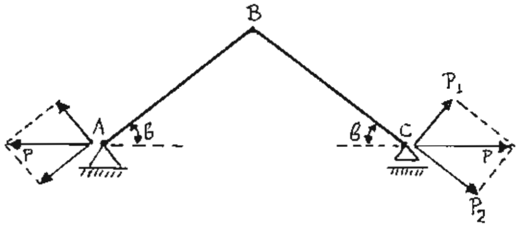
$$\phi_{AB} = \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_{M=0} \Rightarrow \phi_{AB} = \frac{P\cdot\sqrt{3}}{A\cdot E}$$

ασκηση 5



Θεωροῦμε τό πλαίσιο τοῦ σχήματος, τοῦ ὁποίου τά τμήματα AB καί BC ἔχουν ροπή ἀδράνειας διατομῆς στά ἀντίστοιχα ἐπίπεδα κάμψης I, ἐμβαδό διατομῆς A καί μέτρο ἐλαστικότητας E. Νά βρεθεῖ ἡ ὁριζόντια μετατόπιση τοῦ σημείου C. Στήν ἔκφραση γιά τή μετατόπιση νά ληφθοῦν ὑπ' ὄψη τά ἀποτελέσματα καί τῆς κάμψης καί τοῦ ἐφελκυσμοῦ.

λυση



Ἡ δύναμη P ἀσκεῖται στό σημεῖο C. Στό σημεῖο A προκαλεῖται ἀντίρροπη ἴση ἀντίδραση. Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα BC. Λόγω συμμετρίας θά ἔχουμε ἴση ἐνέργεια παραμόρφωσης καί γιά τό τμῆμα AB.

Στό τμῆμα BC θά ἔχουμε ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης, U^M_{BC}, πού προκαλεῖται ἀπό τή συνιστῶσα P_1 τῆς δύναμης P καί ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω ἐφελκυσμοῦ, U^N_{BC}, πού προκαλεῖται ἀπό τή συνιστῶσα P_2 τῆς δύναμης P. Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό θά εἶναι: $U_{BC} = U^M_{BC} + U^N_{BC}$.

Γιά τό τμῆμα BC ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό C εἶναι: $M(x) = P_1 \cdot x = P \cdot \sin\beta \cdot x$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης, ἑπομένως, λόγω κάμψης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι: $U^M_{BC} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell} M^2(x) \cdot dx$

Ἡ ἀξονική ἐφελκυστική δύναμη γιά τό τμῆμα BC εἶναι: $N_{BC} = P_2 = P \cdot \cos\beta$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης, ἑπομένως, λόγω ἐφελκυσμοῦ γιά τό τμῆμα αὐτό θά εἶναι: $U^N_{BC} = \frac{N^2_{BC} \cdot \ell}{2 \cdot A \cdot E}$.

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα BC εἶναι:

$$U_{BC} = U^M_{BC} + U^N_{BC} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell} M^2(x) \cdot dx + \frac{N^2_{BC} \cdot \ell}{2 \cdot A \cdot E}.$$

Γιά τό τμῆμα AB ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης U_{AB} εἶναι: $U_{AB} = U_{BC}$.

Ἡ συνολική, λοιπόν, ἐνέργεια παραμόρφωσης U τοῦ πλαισίου εἶναι: $U = U_{AB} + U_{BC} \Rightarrow U = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M^2(x) \cdot dx + \frac{N^2_{BC} \cdot l}{A \cdot E}$.

Ἡ ὁριζόντια μετατόπιση τοῦ σημείου C εἶναι: $\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P}$.

Εἶναι: $$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l \frac{\partial M^2(x)}{\partial P} \cdot dx + \frac{\frac{\partial N^2_{BC}}{\partial P} \cdot l}{A \cdot E} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l 2 \cdot M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} \cdot dx + \frac{2 \cdot N_{BC} \cdot \frac{\partial N_{BC}}{\partial P} \cdot l}{A \cdot E},$$

$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = x \cdot \sin\beta$, $\frac{\partial N_{BC}}{\partial P} = \cos\beta$, ὁπότε:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2}{E \cdot I} \cdot \int_0^l P \cdot \sin\beta \cdot x \cdot x \cdot \sin\beta \cdot dx + \frac{2 \cdot P \cdot \cos\beta \cdot \cos\beta \cdot l}{A \cdot E} \Rightarrow$$

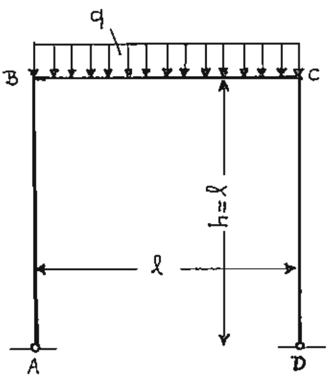
$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2 \cdot P \cdot \sin^2\beta}{E \cdot I} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx + \frac{2 \cdot P \cdot l \cdot \cos^2\beta}{A \cdot E} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2 \cdot P \cdot l^3 \cdot \sin^2\beta}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{2 \cdot P \cdot l \cdot \cos^2\beta}{A \cdot E} .$$

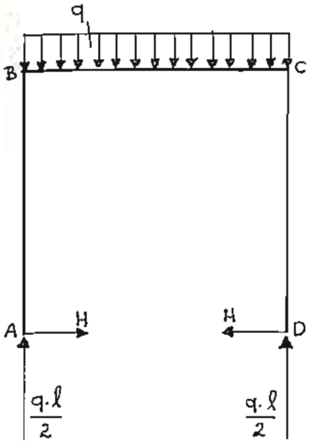
Ἡ ὁριζόντια μετατόπιση, λοιπόν, τοῦ σημείου C εἶναι:

$$\delta_C = \frac{2 \cdot P \cdot l^3 \cdot \sin^2\beta}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{2 \cdot P \cdot l \cdot \cos^2\beta}{A \cdot E} .$$

ασκηση 6



Στό διαρθρωτό πλαίσιο τοῦ σχήματος, πού δέχεται στό τμῆμα BC τήν ὁμοιόμορφη φόρτιση q, νά βρεθοῦν οἱ ἀντιδράσεις στά σημεῖα A καί D. (Νά ληφθοῦν ὑπ'ὄψη μόνο τά ἀποτελέσματα τῆς κάμψης)



λυση

Οἱ κατακόρυφες συνιστῶσες τῶν ἀντιδράσεων στά Α καί D θά εἶναι ἴσες μέ $\frac{q\cdot \ell}{2}$ ἡ καθεμιά. Οἱ ὁριζόντιες συνιστῶσες θά εἶναι ἀντίρροπες καί ἴσες, ἔστω, μέ Η ἡ καθεμιά. Θεωροῦμε τήν Η ὡς ὑπερστατικό μέγεθος καί θά τήν ὑπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τοῦ Castigliano.

Ἡ καμπτική ροπή στό τμῆμα ΑΒ καί σέ ἀπόσταση x ἀπό τό Α εἶναι: $M_{AB}(x) = -H\cdot x$.

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι $U_{AB} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{\ell} M^2_{AB}(x)\cdot dx$

Στό τμῆμα BC καί σέ ἀπόσταση x ἀπό τό B ἡ καμπτική ροπή εἶναι $M_{BC}(x) = -H\cdot \ell - \frac{q\cdot x^2}{2} + \frac{q\cdot \ell}{2}\cdot x$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι: $U_{BC} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\int_0^{\ell} M^2_{BC}(x)\cdot dx$.

Τέλος στό τμῆμα CD καί σέ ἀπόσταση x ἀπό τό C ἡ καμπτική ροπή εἶναι: $M_{CD}(x) = -H\cdot \ell + H\cdot x$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι: $U_{CD} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{\ell} M^2_{CD}(x)\cdot dx$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης, ἑπομένως, ὅλου τοῦ πλαισίου εἶναι:

$$U = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\left[\int_0^{\ell} M^2_{AB}(x)\cdot dx + \int_0^{\ell} M^2_{BC}(x)\cdot dx + \int_0^{\ell} M^2_{CD}(x)\cdot dx\right]$$

Ἡ μερική παράγωγος τῆς U ὡς πρός Η δίνει τήν ὁριζόντια μετατόπιση γιά καθένα ἀπό τά σημεῖα Α καί D. Δεδομένου ὅμως ὅτι στά Α καί D ἔχουμε ἀρθρώσεις, οἱ ὁριζόντιες αὐτές μετακινήσεις θά εἶναι μηδενικές, ὁπότε $\frac{\partial U}{\partial H} = 0$. Ἔχουμε λοιπόν:

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\left[\int_0^{\ell}\frac{\partial M^2_{AB}(x)}{\partial H}\cdot dx + \int_0^{\ell}\frac{\partial M^2_{BC}(x)}{\partial H}\cdot dx +\right.$$

$$\left. + \int_0^{\ell}\frac{\partial M^2_{CD}(x)}{\partial H}\cdot dx\right] = 0 \Rightarrow \int_0^{\ell} 2\cdot M_{AB}(x)\cdot\frac{\partial M_{AB}(x)}{\partial H}\cdot dx +$$

$$+\int_0^{\ell} 2\cdot M_{BC}(x)\cdot\frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial H} + \int_0^{\ell} 2\cdot M_{CD}(x)\cdot\frac{\partial M_{CD}(x)}{\partial H} = 0$$

Εἶναι : $\dfrac{\partial M_{AB}(x)}{\partial H} = -x$, $\dfrac{\partial M_{BC}(x)}{\partial H} = -\ell$, $\dfrac{\partial M_{CD}(x)}{\partial H} = -\ell + x$,

ὁπότε : $$\int_0^\ell (-H\cdot x)\cdot(-x)\cdot dx + \int_0^\ell \left(-H\cdot\ell - \frac{q\cdot x^2}{2} + \frac{q\cdot\ell}{2}\cdot x\right)\cdot(-\ell)\cdot dx +$$

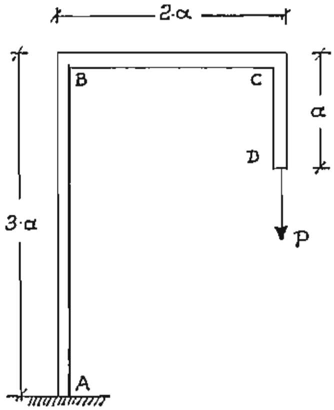
$$\int_0^\ell (-H\cdot\ell + H\cdot x)\cdot(-\ell+x)\cdot dx = 0 \Rightarrow \int_0^\ell H\cdot x^2\cdot dx \;+$$

$$+\int_0^\ell \left(H\cdot\ell^2 + \frac{q\cdot\ell\cdot x^2}{2} - \frac{q\cdot\ell^2\cdot x}{2}\right)\cdot dx + \int_0^\ell \left(H\cdot\ell^2 - 2\cdot H\cdot\ell\cdot x + H\cdot x^2\right) dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{H\cdot\ell^3}{3} + H\cdot\ell^3 + \frac{q\cdot\ell^4}{6} - \frac{q\cdot\ell^4}{4} + H\cdot\ell^3 - 2\cdot H\cdot\frac{\ell^3}{2} + H\cdot\frac{\ell^3}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\cdot H\cdot\ell^3}{3} = \frac{q\cdot\ell^4}{12} \Rightarrow H = \frac{q\cdot\ell}{20} \;.$$

ασκηση 7



Θεωροῦμε τόν πακτωμένο στύλο ABCD τοῦ σχήματος, στό ἄκρο D τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζει τό κατακόρυφο φορτίο P. Ὅλα τά τμήματα τοῦ στύλου ἔχουν ἐμβαδό διατομῆς A, μέτρο ἐλαστικότητας E καί ροπή ἀδράνειας διατομῆς στά ἀντίστοιχα ἐπίπεδα κάμψης I. Νά βρεθεῖ ἡ ὁριζόντια καί ἡ κατακόρυφη μετατόπιση τοῦ σημείου D.

Στήν ἔκφραση γιά τή μετατόπιση νά ληφθοῦν ὑπ' ὄψη τά ἀποτελέσματα καί τῆς κάμψης καί τῆς ἀξονικῆς δύναμης.

λυση

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Castiliagno ἡ μετατόπιση δ_D τοῦ σημείου D εἶναι $\delta_D = \dfrac{\partial U}{\partial P}$, ὅπου U ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης ὅλου τοῦ στύλου. Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά καθένα ἀπό τά τμήματα AB, BC, CD. Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης U θά προκύψει ὡς ἄθροισμα τῶν ἐπί μέρους ἐνεργειῶν παραμόρφωσης τῶν παραπάνω τμημάτων. Ἔχουμε λοιπόν:

Τμῆμα DC

Στό τμῆμα αὐτό ἔχουμε ἀξονική ἐφελκυστική δύναμη $N_{DC} = P$. Ἡ καμπτική ροπή γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι μηδενική , $M_{DC} = 0$.

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης, λοιπόν, U_{DC} εἶναι: $U_{DC} = \dfrac{N^2_{DC} \cdot \ell_{DC}}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow$
$\Rightarrow U_{DC} = \dfrac{N^2_{DC} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E}$.

Τμῆμα CB

Στό τμῆμα αὐτό ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό σημεῖο C εἶναι $M_{CB}(x) = -P \cdot x$. Ἡ ἀξονική δύναμη γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι μηδενική, ὁπότε $U_{CB} = \dfrac{1}{2 \cdot E \cdot I} \displaystyle\int_0^{2\alpha} M^2_{CB}(x) \cdot dx$

Τμῆμα BA

Στό τμῆμα αὐτό ἡ καμπτική ροπή εἶναι σταθερή καί ἴση μέ $-2 \cdot P \cdot \alpha$, $M_{BA} = -2 \cdot P \cdot \alpha$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης εἶναι $U^M_{BA} = \dfrac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \displaystyle\int_0^{3 \cdot \alpha} M^2_{BA} \cdot dx$. Στό τμῆμα BA ἔχουμε ἐπίσης ἀξονική θλιπτική δύναμη ἴση μέ P, $N_{BA} = -P$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω τῆς ἀξονικῆς αὐτῆς δύναμης εἶναι:

$$U^N_{BA} = \frac{N^2_{BA} \cdot \ell_{BA}}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U^N_{BA} = \frac{N^2_{BA} \cdot 3 \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} .$$

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα BA εἶναι:

$$U_{BA} = U^M_{BA} + U^N_{BA} \Rightarrow U_{BA} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{3\alpha} M^2_{BA} \cdot dx + \frac{3 \cdot N^2_{BA} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} .$$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης U ὅλου τοῦ στύλου εἶναι:

$$U = U_{DC} + U_{CB} + U_{BA} \Rightarrow U = \frac{N^2_{DC} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{2\alpha} M^2_{CB} \cdot dx +$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{3 \cdot \alpha} M^2_{BA} \cdot dx + \frac{3 \cdot N^2_{BA} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} .$$

Ἡ κατακόρυφη μετατόπιση τοῦ D εἶναι: $\delta_D = \dfrac{\partial U}{\partial P}$. Ἔχουμε:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\frac{\partial N^2_{DC}}{\partial P} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{2\alpha} \frac{\partial M^2_{CB}(x)}{\partial P} \cdot dx + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{3\alpha} \frac{\partial M^2_{BA}}{\partial P} \cdot dx +$$
$$+ \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{\partial N^2_{BA}}{\partial P} \cdot \alpha}{A \cdot E} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2 \cdot N_{DC} \cdot \frac{\partial N_{DC}}{\partial P} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{2\alpha} 2 \cdot M_{CB}(x) \cdot \frac{\partial M_{CB}(x)}{\partial P} \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{3 \cdot \alpha} 2 \cdot M_{BA} \cdot \frac{\partial M_{BA}}{\partial P} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot N_{BA} \cdot \frac{\partial N_{BA}}{\partial P} \cdot \alpha}{A \cdot E} .$$

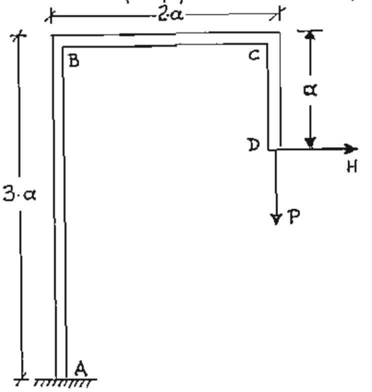
$\dfrac{\partial N_{DC}}{\partial P} = 1$, $\dfrac{\partial M_{CB}(x)}{\partial P} = -x$, $\dfrac{\partial M_{BA}}{\partial P} = -2 \cdot \alpha$, $\dfrac{\partial N_{BA}}{\partial P} = -1$, ὁπότε:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P \cdot 1 \cdot \alpha}{A \cdot E} + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^{2\alpha} (-P \cdot x) \cdot (-x) \cdot dx + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^{3\alpha} (-2 \cdot P \cdot \alpha) \cdot (-2\alpha) \cdot dx +$$

$$+\frac{3\cdot(-P)\cdot(-1)\cdot\alpha}{A\cdot E} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P\cdot\alpha}{A\cdot E} + \frac{P}{E\cdot I}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{2\alpha} + \frac{4\cdot P\cdot\alpha^2}{E\cdot I}\cdot\left[x\right]_0^{3\alpha} + \frac{3\cdot P\cdot\alpha}{A\cdot E}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{4\cdot P\cdot\alpha}{A\cdot E} + \frac{P\cdot 8\alpha^3}{3\cdot E\cdot I} + \frac{12\cdot P\cdot\alpha^3}{E\cdot I} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{4\cdot P\cdot\alpha}{A\cdot E} + \frac{44}{3}\cdot\frac{P\cdot\alpha^3}{E\cdot I}$$

Ἡ κατακόρυφη μετατόπιση, λοιπόν, τοῦ D εἶναι: $\delta_D = \dfrac{4\cdot P\cdot\alpha}{A\cdot E} + \dfrac{44}{3}\cdot\dfrac{P\cdot\alpha^3}{E\cdot I}$



Γιά νά βροῦμε τήν ὁριζόντια μετατόπιση δ'_D τοῦ D θεωροῦμε ὅτι ἐφαρμόζει στό D μιά ὁριζόντια δύναμη H. Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης U′ ὅλου τοῦ στύλου, πού προκαλεῖται ἀπό τίς δυνάμεις P καί H.
Ἡ μερική παράγωγος τῆς U′ ὡς πρός H (ὅπου μετά τίς παραγωγίσεις θέτομε H=0, ἐπειδή ἡ δύναμη H δέν ὑπάρχει στήν πραγματικότητα) θά μᾶς δώσει τήν ὁριζόντια μετατόπιση δ'_D, $\delta'_D = \left(\dfrac{\partial U'}{\partial H}\right)_{H=0}$

Τμῆμα DC

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό D εἶναι: $M_{DC}(x) = H\cdot x$.
Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης εἶναι: $U'^{M}_{DC} = \dfrac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\displaystyle\int_0^{\alpha} M^2_{DC}(x)\cdot dx$.

Στό τμῆμα αὐτό ἔχουμε ἐπίσης ἀξονική ἐφελκυστική δύναμη ἴση μέ P, $N_{DC} = P$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω ἀξονικῆς δύναμης εἶναι:
$U'^{N}_{DC} = \dfrac{N^2_{DC}\cdot \ell_{DC}}{2\cdot A\cdot E} \Rightarrow U'^{N}_{DC} = \dfrac{N^2_{DC}\cdot\alpha}{2\cdot A\cdot E}$.

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης τοῦ τμήματος DC εἶναι:
$U'_{DC} = U'^{M}_{DC} + U'^{N}_{DC} \Rightarrow U'_{DC} = \dfrac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\displaystyle\int_0^{\alpha} M^2_{DC}(x)\cdot dx + \dfrac{N^2_{DC}\cdot\alpha}{2\cdot A\cdot E}$.

Τμῆμα CB

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό C εἶναι: $M_{CB}(x) = H\cdot\alpha - P\cdot x$.
Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης εἶναι: $U'^{M}_{CB} = \dfrac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\displaystyle\int_0^{2\alpha} M^2_{CB}(x)\cdot dx$.

Στό τμῆμα αὐτό ἔχουμε ἐπίσης ἀξονική ἐφελκυστική δύναμη ἴση μέ H, $N_{CB} = H$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω αὐτῆς τῆς ἀξονικῆς δύναμης εἶναι: $U'^{N}_{CB} = \dfrac{N^2_{CB}\cdot \ell_{CB}}{2\cdot A\cdot E} \Rightarrow U'^{N}_{CB} = \dfrac{N^2_{BC}\cdot 2\cdot\alpha}{2\cdot A\cdot E}$.

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι:
$U'_{CB} = U'^{M}_{CB} + U'^{N}_{CB} \Rightarrow U'_{CB} = \dfrac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\displaystyle\int_0^{2\alpha} M^2_{CB}(x)\cdot dx + \dfrac{N^2_{CB}\cdot\alpha}{A\cdot E}$.

Τμῆμα ΒΑ

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό σημεῖο Β εἶναι : $M_{BA}(x) = -2 \cdot P \cdot \alpha + H \cdot \alpha - H \cdot x$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης εἶναι : $U'^{M}_{BA} = \dfrac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \displaystyle\int_0^{3\alpha} M^2_{BA}(x) \cdot dx$. Στό τμῆμα αὐτό ἔχουμε ἐπίσης ἀξονική θλιπτική δύναμη ἴση μέ P , $N_{BA} = -P$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω αὐτῆς τῆς ἀξονικῆς δύναμης εἶναι : $U'^{N}_{BA} = \dfrac{N^2_{BA} \cdot \ell_{BA}}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U'^{N}_{BA} = \frac{N^2_{BA} \cdot 3\alpha}{2 \cdot A \cdot E} .$$

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι :

$$U'_{BA} = U'^{M}_{BA} + U'^{N}_{BA} \Rightarrow U'_{BA} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{3\alpha} M^2_{BA}(x) \cdot dx + \frac{3 \cdot N^2_{BA} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E}$$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης , ἐπομένως , ὅλου τοῦ στύλου εἶναι :

$$U' = U'_{DC} + U'_{CB} + U'_{BA} \Rightarrow U' = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\alpha} M^2_{DC}(x) \cdot dx + \frac{N^2_{DC} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{2\alpha} M^2_{CB}(x) \cdot dx + \frac{N^2_{CB} \cdot \alpha}{A \cdot E} + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{3\alpha} M^2_{BA}(x) \cdot dx + \frac{3}{2} \cdot \frac{N^2_{BA} \cdot \alpha}{A \cdot E} .$$

Ἡ ὁριζόντια μετατόπιση δ'_D ἰσοῦται μέ τή μερική παράγωγο τῆς U' ὡς πρός H, ὅπου μετά τίς παραγωγίσεις θέτομε $H = 0$. Εἶναι :

$$\frac{\partial U'}{\partial H} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\alpha} \frac{\partial M^2_{DC}(x)}{\partial H} \cdot dx + \frac{\frac{\partial N^2_{DC}}{\partial H} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{2\alpha} \frac{\partial M^2_{CB}(x)}{\partial H} \cdot dx +$$

$$+ \frac{\frac{\partial N^2_{CB}}{\partial H} \cdot \alpha}{A \cdot E} + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{3\alpha} \frac{\partial M^2_{BA}(x)}{\partial H} \cdot dx + \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{\partial N^2_{BA}}{\partial H} \cdot \alpha}{A \cdot E} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U'}{\partial H} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\alpha} 2 \cdot M_{DC}(x) \cdot \frac{\partial M_{DC}(x)}{\partial H} \cdot dx + \frac{2 \cdot N_{DC} \cdot \frac{\partial N_{DC}}{\partial H} \cdot \alpha}{2 \cdot A \cdot E} +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{2\alpha} 2 \cdot M_{CB}(x) \cdot \frac{\partial M_{CB}(x)}{\partial H} \cdot dx + \frac{2 \cdot N_{CB} \cdot \frac{\partial N_{CB}}{\partial H} \cdot \alpha}{A \cdot E} +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{3\alpha} 2 \cdot M_{BA}(x) \cdot \frac{\partial M_{BA}(x)}{\partial H} \cdot dx + \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot N_{BA} \cdot \frac{\partial N_{BA}}{\partial H} \cdot \alpha}{A \cdot E} .$$

$$\frac{\partial M_{DC}(x)}{\partial H} = x \; , \quad \frac{\partial N_{DC}}{\partial H} = 0 \; , \quad \frac{\partial M_{CB}(x)}{\partial H} = \alpha \; , \quad \frac{\partial N_{CB}}{\partial H} = 1 \; , \quad \frac{\partial M_{BA}(x)}{\partial H} = \alpha - x$$

$\dfrac{\partial N_{BA}}{\partial H} = 0$; ὁπότε : $\dfrac{\partial U'}{\partial H} = \dfrac{1}{E \cdot I} \cdot \displaystyle\int_0^{\alpha} H \cdot x \cdot x \cdot dx + \dfrac{1}{E \cdot I} \cdot \displaystyle\int_0^{2\alpha} (-P \cdot x + H \cdot \alpha) \cdot \alpha \cdot dx$

$$+ \frac{2 \cdot H \cdot 1 \cdot \alpha}{A \cdot E} + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^{3\alpha} (-2 \cdot P \cdot \alpha + H \cdot \alpha - H \cdot x) \cdot (\alpha - x) \cdot dx \quad , (1) .$$

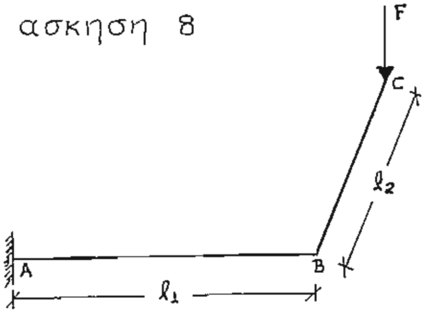
Θέτοντας στήν (1) $H=0$ παίρνουμε:

$$\delta'_D = \left(\frac{\partial U'}{\partial H}\right)_{H=0} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\int_0^{2a}(-P\cdot x)\cdot a\cdot dx + \frac{1}{E\cdot I}\cdot\int_0^{3a}(-2\cdot P\cdot a)\cdot(a-x)\cdot dx \Rightarrow$$

$$\delta'_D = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left[-P\cdot a\cdot\frac{4\cdot a^2}{2} + 2\cdot P\cdot a\cdot\frac{9\cdot a^2}{2} - 2\cdot P\cdot a^2\cdot 3\cdot a\right] \Rightarrow$$

$$\delta'_D = \frac{P\cdot a^3}{E\cdot I}\ .$$

ασκηση 8



Ἡ δοκός ABC εἶναι πακτωμένη στό A καί δέχεται στό ἐλεύθερό της ἄκρο C τό κατακόρυφο φορτίο F. Τό τμῆμα BC τῆς δοκοῦ εἶναι κάθετο πρός τό τμῆμα AB. Νά βρεθεῖ ἡ κατακόρυφη μετατόπιση τοῦ σημείου C.

Νά θεωρηθεῖ ὅτι ἡ δοκός ἔχει ροπή ἀδράνειας διατομῆς I καί στρεπτική δυσκαμψία D.

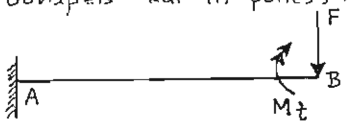
λυση

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης τοῦ τμήματος BC εἶναι:

$$U_{BC} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\int_0^{\ell_2} M^2_{BC}(x)\cdot dx\ ,\quad \text{όπου}$$

$M_{BC}(x)$ ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό C. Εἶναι: $M_{BC}(x) = -F\cdot x$

Γιά νά βροῦμε τίς δυνάμεις καί τίς ροπές πού καταπονοῦν τό σημεῖο B, θεωροῦμε ὅτι κάνουμε μιά τομή στό σημεῖο B τῆς BA καί θέτομε τίς δυνάμεις καί τίς ροπές, πού ἐμφανίζονται στήν τομή αὐτή.



Ἔτσι στό σημεῖο B θά ἔχουμε τέμνουσα δύναμη F καί στρεπτική ροπή $M_t = -F\cdot\ell_2$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης τοῦ τμήματος AB λόγω στρέψης εἶναι:

$U^{Mt}_{AB} = \dfrac{M_t^2\cdot\ell_1}{2\cdot D}$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης τοῦ τμήματος AB λόγω κάμψης, πού προκαλεῖται ἀπό τήν τέμνουσα δύναμη F, εἶναι: $U^{M}_{AB} = \dfrac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\int_0^{\ell_1} M^2_{AB}(x)\cdot dx$

ὅπου $M_{AB}(x)$ ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό B καί $M_{AB}(x) = -F\cdot x$

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα AB εἶναι:

$$U_{AB} = U_{AB}^{Mt} + U_{AB}^{M} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Mt^2 \cdot \ell_1}{2 \cdot D} + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell_1} M_{AB}^2(x) \cdot dx$$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης ὅλης τῆς δοκοῦ εἶναι:

$$U = U_{BC} + U_{AB} \Rightarrow U = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell_2} M_{BC}^2(x) \cdot dx + \frac{Mt^2 \cdot \ell_1}{2 \cdot D} + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell_1} M_{AB}^2(x) \cdot dx$$

Ἡ κατακόρυφη μετατόπιση δ_C τοῦ σημείου C εἶναι σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Castigliano $\delta_C = \frac{\partial U}{\partial F}$.

Ἔχουμε: $$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell_2} 2 \cdot M_{BC}(x) \cdot \frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial F} \cdot dx + \frac{2 \cdot Mt \cdot \frac{\partial Mt}{\partial F} \cdot \ell_1}{2 \cdot D} +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell_1} 2 \cdot M_{AB}(x) \cdot \frac{\partial M_{AB}(x)}{\partial F} \cdot dx.$$

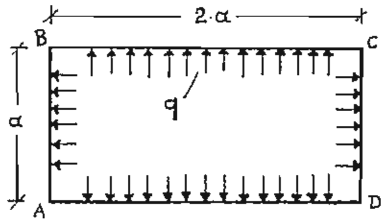
$\frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial F} = -x$, $\frac{\partial Mt}{\partial F} = -\ell_2$, $\frac{\partial M_{AB}(x)}{\partial F} = -x$, ὁπότε:

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell_2} (-F \cdot x)(-x)\, dx + \frac{(-F \cdot \ell_2) \cdot (-\ell_2) \cdot \ell_1}{D} + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^{\ell_1} (-F \cdot x) \cdot (-x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot F \cdot \frac{\ell_2^3}{3} + \frac{F \cdot \ell_2^2 \cdot \ell_1}{D} + \frac{1}{E \cdot I} \cdot F \cdot \frac{\ell_1^3}{3}.$$

Εἶναι λοιπόν $$\delta_C = \frac{F \cdot \ell_2^3 + F \cdot \ell_1^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{F \cdot \ell_2^2 \cdot \ell_1}{D}.$$

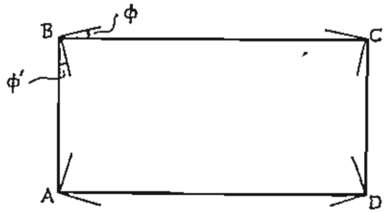
ασκηση 9



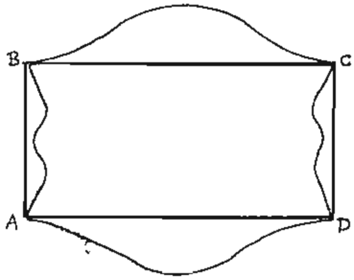
Θεωροῦμε τό κλειστό πλαίσιο τοῦ σχήματος, τό ὁποῖο δέχεται ὁμοιόμορφη ἐσωτερική πίεση q. Νά γίνει σκαρίφημα τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς ὅλου τοῦ φορέα καί νά κατασκευασθεῖ τό διάγραμμα ροπῶν κάμψης.

λυση

Ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς ἐσωτερικῆς πίεσης q θά ἔχουμε στροφή τῶν ὀρθῶν γωνιῶν στίς θέσεις A, B, C, D. Προϋπόθεση γιά νά μή σπάσει ὁ φορέας εἶναι ἡ γωνία φ στή θέση B νά εἶναι ἴση μέ τή φ'. Ἀντίστοιχα καί γιά τίς θέσεις A, C, D. Τήν πρόταση αὐτή θά

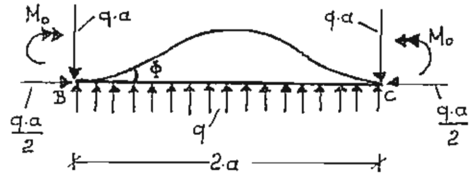


χρησιμοποιήσουμε παρακάτω γιά νά ὑπολογίσουμε τίς ροπές στίς πακτώσεις A, B, C, D. Σχεδιάζουμε ἐπίσης κατά προσέγγιση τή μορφή, πού παίρνει ἡ ἐλαστική γραμμή τοῦ φορέα μετά τήν παραμόρφωση.



σκαρίφημα τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τοῦ πλαισίου.

Θά βροῦμε τή ροπή στήν πάκτωση B. Λόγω συμμετρίας θά ἔχουμε ἴσες ροπές καί στίς ἄλλες πακτώσεις A, C, D. Ἄς εἶναι M_0 καθεμιά ἀπό τίς ἴσες αὐτές ροπές πάκτωσης. Ἀπομονώνουμε τό τμῆμα BC καί σχεδιάζουμε τίς δυνάμεις καί τίς ροπές πού ἐνεργοῦν σ' αὐτό. Λόγω τῆς ἐσωτερικῆς φόρτισης q θά ἔχουμε στά B, C τέμνουσες ἀντιδράσεις ἴσες τήν καθεμιά μέ $q\cdot a$. Ὅμοια στό τμῆμα AB θά ἔχουμε τέμνουσες ἀντιδράσεις στά A, B ἴσες τήν καθεμιά μέ $\frac{q\cdot a}{2}$. Ἡ τέμνουσα ὅμως δύναμη $\frac{q\cdot a}{2}$ τοῦ σημείου B



τοῦ τμήματος AB δρᾶ ὡς ἀξονική δύναμη στό σημεῖο B τοῦ τμήματος BC. Θά ἔχουμε, λοιπόν, στά B, C ἀξονικές θλιπτικές δυνάμεις ἴσες τήν καθεμιά μέ $\frac{q\cdot a}{2}$. Τέλος στά B, C θά ἐνεργοῦν καί οἱ ροπές πάκτωσης M_0.

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό B εἶναι: $M(x) = M_0 - q\cdot a\cdot x + \frac{q\cdot x^2}{2}$. Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τοῦ τμήματος BC εἶναι:

$$\frac{d^2 u(x)}{d x^2} = -\frac{M(x)}{E\cdot I_{zz}} \quad (1).$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν (1) παίρνουμε: $E\cdot I_{zz}\cdot\frac{du(x)}{dx} = -\int M(x)\cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow E\cdot I_{zz}\cdot\frac{du(x)}{dx} = -\int\left(M_0 - q\cdot a\cdot x + \frac{q\cdot x^2}{2}\right)\cdot dx \Rightarrow$$

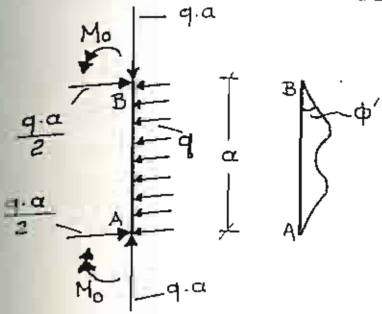
$$\Rightarrow E\cdot I_{zz}\cdot\frac{du(x)}{dx} = -M_0\cdot x + \frac{q\cdot a\cdot x^2}{2} - \frac{q\cdot x^3}{6} + C_1.$$

Στό μέσο τοῦ τμήματος BC $(x=a)$ ἡ κλίση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι μηδενική, ὁπότε: $-M_0\cdot a + \frac{q\cdot a^3}{2} - \frac{q\cdot a^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = M_0\cdot a - \frac{q\cdot a^3}{3}$.

Ἡ ἐξίσωση, λοιπόν, πού δίνει τίς κλίσεις τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τοῦ τμήματος BC, εἶναι :

$$E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = -M_o \cdot x + \frac{q \cdot a \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot x^3}{6} + M_o \cdot a - \frac{q \cdot a^3}{3} \quad (2).$$

Θέτοντας στή (2) $x=0$ παίρνουμε τήν κλίση ϕ τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς στό B καί $\phi = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \left(M_o \cdot a - \frac{q \cdot a^3}{3} \right)$.



Μέ ἀνάλογους συλλογισμούς θά βροῦμε τήν κλίση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς στό σημεῖο B τῆς AB. Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό A εἶναι : $M(x) = M_o - \frac{q \cdot a \cdot x}{2} + \frac{q \cdot x^2}{2}$.

Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι :

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E \cdot I_{zz}} \Rightarrow E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = -\int M(x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = -\int \left(M_o - \frac{q \cdot a \cdot x}{2} + \frac{q \cdot x^2}{2} \right) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = -M_o \cdot x + \frac{q \cdot a \cdot x^2}{4} - \frac{q \cdot x^3}{6} + C_1'$$

Στό μέσο τοῦ τμήματος AB $\left(x = \frac{a}{2}\right)$ ἡ κλίση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι μηδενική, ὁπότε : $-M_o \cdot \frac{a}{2} + \frac{q \cdot a}{4} \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{q \cdot a^3}{48} + C_1' = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow C_1' = \frac{M_o \cdot a}{2} - \frac{q \cdot a^3}{24}$.

Ἡ ἐξίσωση, λοιπόν, πού δίνει τίς κλίσεις τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τοῦ τμήματος AB, εἶναι : $E \cdot I_{zz} \cdot \frac{du(x)}{dx} = -M_o \cdot x + \frac{q \cdot a \cdot x^2}{4} - \frac{q \cdot x^3}{6} + \frac{M_o \cdot a}{2} - \frac{q \cdot a^3}{24}$ (3)

Θέτοντας στήν (3) $x=a$ παίρνουμε τήν κλίση ϕ' τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς στό B καί $\phi' = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \left(-\frac{M_o \cdot a}{2} + \frac{q \cdot a^3}{24} \right)$.

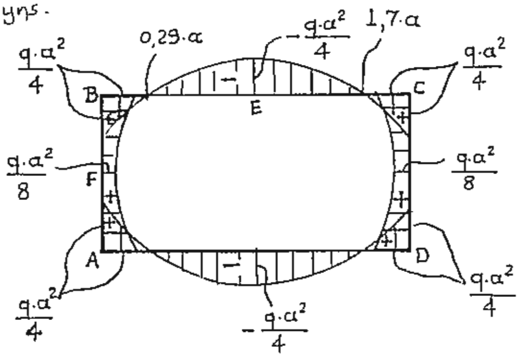
Ὅπως εἴπαμε καί στήν ἀρχή, θά πρέπει $\phi = \phi' \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \left(M_o \cdot a - \frac{q \cdot a^3}{3} \right) = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \left(-\frac{M_o \cdot a}{2} + \frac{q \cdot a^3}{24} \right) \Rightarrow M_o = \frac{q \cdot a^2}{4}$.

Γιά τό τμῆμα, ἑπομένως, BC ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό B εἶναι : $M(x) = \frac{q \cdot a^2}{4} - q \cdot a \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2}$. Ἡ καμπτική ροπή μηδενίζεται γιά $\frac{q \cdot a^2}{4} - q \cdot a \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = 0{,}29 \cdot a$ καί $x = 1{,}7 \cdot a$.

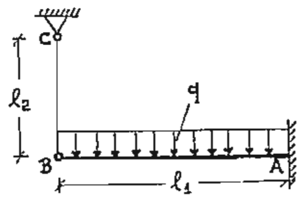
Στό μέσο E τοῦ τμήματος BC, $(x=a)$, ἡ καμπτική ροπή εἶναι $M_E = -\frac{q \cdot a^2}{4}$.

Γιά τό τμῆμα AB ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό A εἶναι $M(x) = \frac{q \cdot a^2}{4} - \frac{q \cdot a \cdot x}{2} + \frac{q \cdot x^2}{2}$. Ἡ M(x) δέν μηδενίζεται στά σημεῖα τοῦ τμήματος AB. Στό μέσο F τοῦ AB $\left(x = \frac{a}{2}\right)$ ἡ καμπτική ροπή εἶναι $M_F = \frac{q \cdot a^2}{8}$.

Μέ βάση τίς παραπάνω τιμές χαράζουμε εὔκολα τό διάγραμμα ροπῶν κάμψης.

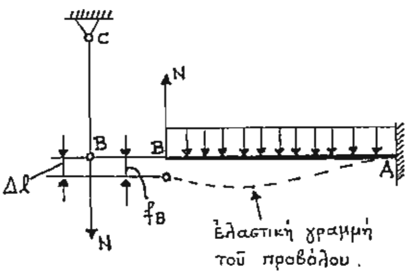


ασκηση 10



Θεωροῦμε τόν πρόβολο AB τοῦ σχήματος, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος l_1, μέτρο ἐλαστικότητας E_1, ροπή ἀδράνειας διατομῆς I_{zz}, καί δέχεται τήν ὁμοιόμορφη φόρτιση q. Ὁ πρόβολος συνδέεται στό B μέ τήν ἐλαστική ράβδο BC, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος l_2, μέτρο ἐλαστικότητας E_2 καί ἐμβαδό διατομῆς A. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀξονική δύναμη N, πού καταπονεῖ τή ράβδο BC.

λυση



Τέμνουμε τό φορέα στό σημεῖο B καί τόν διαχωρίζουμε στήν προβολική δοκό AB καί στή ράβδο BC. Προσάγουμε τήν ἀξονική δύναμη N ὡς ἐξωτερικό φορτίο. Ἡ τιμή τῆς N θά βρεθεῖ ἀπό τή συνθήκη συμβιβαστοῦ τῶν παραμορφώσεων, ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι ἡ βύθιση f_B τοῦ σημείου B τοῦ προβόλου AB λόγω τῆς δύναμης N καί τῆς φόρτισης q θά πρέπει νά εἶναι ἴση μέ τήν ἀξονική ἐπιμήκυνση Δl τῆς ράβδου BC, $f_B = \Delta l$.

Ἡ βύθιση τοῦ σημείου B τοῦ προβόλου AB θά προκύψει ὡς ἐπαλληλία τῶν βυθίσεων πού προκαλοῦν χωριστά ἡ φόρτιση q καί ἡ δύναμη N. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε τή βύθιση f_1 στό ἄκρο προβόλου πού φορτίζεται μέ ὁμοιόμορφο φορτίο q. Εἶναι : $f_1 = \dfrac{q \cdot \ell_1^4}{8 \cdot E \cdot I_{zz}}$. Ὅμοια ἡ βύθιση f_2 στό ἄκρο προβόλου λόγω δύναμης N, πού ἐφαρμόζει στό ἄκρο αὐτό, εἶναι: $f_2 = \dfrac{N \cdot \ell_1^3}{3 \cdot E_1 \cdot I_{zz}}$

Ἡ βύθιση f_B θά προκύψει ὡς ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν f_1 καί f_2,

$$f_B = f_1 - f_2 = \frac{q \cdot \ell_1^4}{8 \cdot E \cdot I_{zz}} - \frac{N \cdot \ell_1^3}{3 \cdot E \cdot I_{zz}}$$

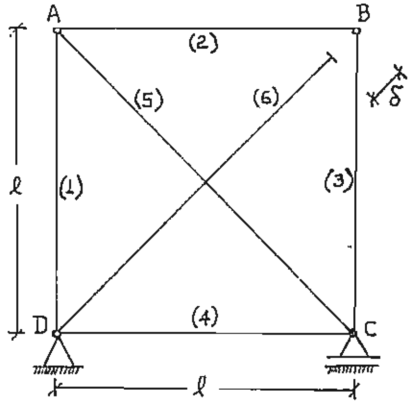
Ἡ ἀξονική ἐπιμήκυνση $\Delta\ell$ τῆς ράβδου BC εἶναι: $\Delta\ell = \dfrac{N \cdot \ell_2}{E_2 \cdot A}$ (πρβλ. σελίδα 35).

Ἑπομένως ἡ συνθήκη συμβιβαστοῦ τῶν παραμορφώσεων γράφεται:

$$\frac{q \cdot \ell_1^4}{8 \cdot E_1 \cdot I_{zz}} - \frac{N \cdot \ell_1^3}{3 \cdot E_1 \cdot I_{zz}} = \frac{N \cdot \ell_2}{E_2 \cdot A}$$

ἀπό τήν ὁποία προκύπτει $N = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{q \cdot \ell_1^4 \cdot E_2 \cdot A}{3 \cdot \ell_2 \cdot E_1 \cdot I_{zz} + \ell_1^3 \cdot E_2 \cdot A}$

ασκηση 11



Στό δικτύωμα τοῦ σχήματος ἡ ράβδος (6) εἶναι κοντύτερη ἀπό τό κανονικό μῆκος της κατά δ. Μέ ἄσκηση βίας πετυχαίνεται ἡ συναρμογή τῶν ράβδων στόν κόμβο B. Νά βρεθοῦν:

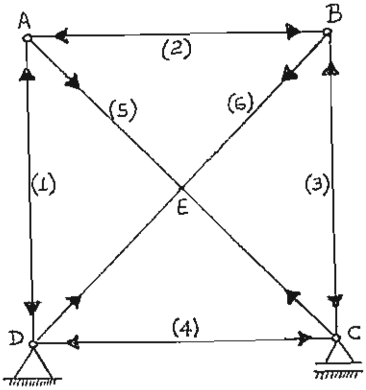
α. Οἱ τάσεις ὅλων τῶν ράβδων μετά τή συναρμολόγηση τοῦ δικτυώματος.

β. Ἡ ἀμοιβαία μετακίνηση τῶν σημείων D καί B σχετικά μέ τή θέση τους πρίν ἀπό τή συναρμολόγηση.

γ. Ἡ ἀμοιβαία μετακίνηση τῶν σημείων A καί C σχετικά μέ τή θέση, πού εἶχαν πρίν ἀπό τή συναρμολόγηση.

Νά θεωρηθεῖ ὅτι ὅλες οἱ ράβδοι ἔχουν ἐμβαδό διατομῆς A καί μέτρο ἐλαστικότητας E.

λυση



Ἔστω ὅτι μετά τή συναρμολόγηση ἡ τάση τῆς ράβδου (6) εἶναι X. Ἡ X θά εἶναι ἐφελκυστική, ὁπότε $S_6 = +X$. Οἱ ράβδοι (5) καί (6) διασταυρώνονται στό σημεῖο Ε. Ἀπό τήν ἰσορροπία δυνάμεων στό Ε προκύπτει $S_5 = S_6 \Rightarrow S_5 = +X$.
Ἀπό τήν ἰσορροπία δυνάμεων στό κόμβο Β προκύπτει ὅτι οἱ τάσεις τῶν ράβδων (2) καί (3) θά εἶναι θλιπτικές καί ἴσες ἡ καθεμιά μέ $X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_2 = S_3 = -\frac{X \cdot \sqrt{2}}{2}$.

Ὅμοια ἀπό τήν ἰσορροπία δυνάμεων στόν κόμβο D βρίσκουμε : $S_1 = S_4 = -\frac{X \cdot \sqrt{2}}{2}$.

Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης τῶν ράβδων τοῦ δικτυώματος.

Εἶναι:

$$U_6 = \frac{S_6^2 \cdot l_6}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_6 = \frac{X^2 \cdot l \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot A \cdot E}.$$

$$U_5 = \frac{S_5^2 \cdot l_5}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_5 = \frac{X^2 \cdot l \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot A \cdot E}.$$

$$U_4 = \frac{S_4^2 \cdot l_4}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_4 = \frac{\left(-\frac{X \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot l}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_4 = \frac{X^2 \cdot l}{4 \cdot A \cdot E}.$$

$$U_3 = \frac{S_3^2 \cdot l_3}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_3 = \frac{\left(-\frac{X \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot l}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_3 = \frac{X^2 \cdot l}{4 \cdot A \cdot E}$$

$$U_2 = \frac{S_2^2 \cdot l_2}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_2 = \frac{\left(-\frac{X \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot l}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_2 = \frac{X^2 \cdot l}{4 \cdot A \cdot E}$$

$$U_1 = \frac{S_1^2 \cdot l_1}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_1 = \frac{\left(-\frac{X \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot l}{2 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U_1 = \frac{X^2 \cdot l}{4 \cdot A \cdot E}$$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης U ὅλου τοῦ δικτυώματος εἶναι:

$$U = \sum_{i=1}^{6} U_i \Rightarrow U = 2 \cdot \frac{X^2 \cdot l \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot A \cdot E} + 4 \cdot \frac{X^2 \cdot l}{4 \cdot A \cdot E} \Rightarrow U = \frac{X^2 \cdot l \cdot \sqrt{2}}{A \cdot E} + \frac{X^2 \cdot l}{A \cdot E}.$$

Ἡ μερική παράγωγος τῆς U ὡς πρός X θά ἰσοῦται μέ δ, ὁπότε:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \delta \Rightarrow 2 \cdot \frac{X \cdot l \cdot \sqrt{2}}{A \cdot E} + 2 \cdot \frac{X \cdot l}{A \cdot E} = \delta \Rightarrow \frac{2 \cdot X \cdot l}{A \cdot E} \cdot (1 + \sqrt{2}) = \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\delta \cdot A \cdot E}{2 \cdot \ell \cdot (1+\sqrt{2})} .$$

Οἱ τάσεις, λοιπόν, τῶν ράβδων τοῦ δικτυώματος εἶναι:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = -\frac{\sqrt{2} \cdot \delta \cdot A \cdot E}{4 \cdot \ell \cdot (1+\sqrt{2})} , \quad S_5 = S_6 = +\frac{\delta \cdot A \cdot E}{2 \cdot \ell \cdot (1+\sqrt{2})} .$$

β. Ἄς εἶναι $\delta_{D,B}$ ἡ ἀμοιβαία μετακίνηση τῶν σημείων D καί B σχετικά μέ τή θέση τους πρίν ἀπό τή συναρμολόγηση. Ἄς εἶναι ἐπίσης $\Delta\ell_6$ ἡ μεταβολή μήκους τῆς ράβδου (6) μετά τή συναρμολόγηση. Θά πρέπει $\Delta\ell_6 + \delta_{D,B} = \delta$.

Ἡ ἐπιμήκυνση $\Delta\ell_6$ εἶναι: $\Delta\ell_6 = \varepsilon_6 \cdot \ell_6 = \frac{\sigma_6}{E} \cdot \ell_6 = \frac{S_6}{A} \cdot \frac{\ell \cdot \sqrt{2}}{E}$, ὅπου

ε_6 ἡ ἀνηγμένη ἀξονική ἐπιμήκυνση τῆς ράβδου (6). Εἶναι λοιπόν:

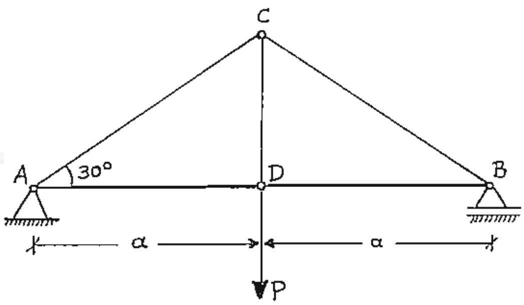
$$\Delta\ell_6 = \frac{\delta \cdot A \cdot E}{2 \cdot \ell \cdot (1+\sqrt{2})} \cdot \frac{\ell \cdot \sqrt{2}}{A \cdot E} \Rightarrow \Delta\ell_6 = \frac{\delta \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} , \text{ ὁπότε } \delta_{D,B} = \delta - \frac{\delta \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2 \cdot \delta \cdot (1+\sqrt{2}) - \delta \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{\delta \cdot (2+\sqrt{2})}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{\delta \cdot (2+\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+2)} \Rightarrow \delta_{D,B} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} .$$

γ. Ἡ ἀμοιβαία μετακίνηση $\delta_{A,C}$ τῶν σημείων A καί C θά εἶναι ἴση μέ τή μεταβολή μήκους $\Delta\ell_5$ τῆς ράβδου (5) λόγω τῆς τάσης S_5. Εἶναι λοιπόν:

$$\delta_{A,C} = \Delta\ell_5 = \frac{S_5 \cdot \ell_5}{A \cdot E} = \frac{\delta \cdot A \cdot E}{2 \cdot \ell \cdot (1+\sqrt{2})} \cdot \frac{\ell \cdot \sqrt{2}}{A \cdot E} \Rightarrow \delta_{A,C} = \frac{\delta \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{\delta}{2+\sqrt{2}}$$

ασκηση 12



1) Στόν ἰσοστατικό φορέα τοῦ σχήματος νά βρεθεῖ ἡ ἀμοιβαία στροφή τῶν διατομῶν γύρω ἀπό τήν ἄρθρωση D.

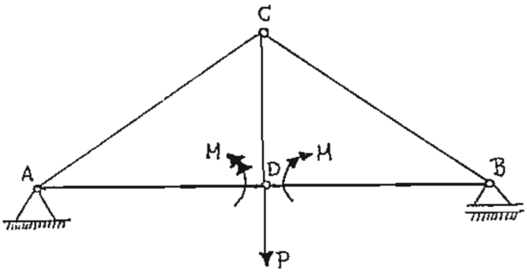
2) Ἄν θεωρηθεῖ ὅτι ἡ δοκός AB ἦταν συνεχής χωρίς ἄρθρωση στό D, νά βρεθοῦν γιά τόν ὑπερστατικό φορέα:

α. Ἡ ροπή M_D, πού θά ἀναπτυχθεῖ, καί οἱ τάσεις τῶν ράβδων.

β. Ἡ κατακόρυφη μετατόπιση τοῦ σημείου D.

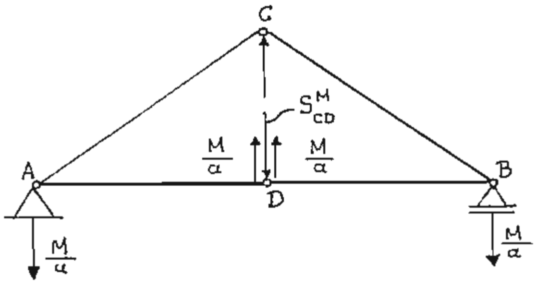
Νά θεωρηθεῖ ὅτι ὅλες οἱ ράβδοι ἔχουν ἴδιο ἐμβαδό διατομῆς A καί ὅτι ἡ δοκός ἔχει ροπή ἀδράνειας διατομῆς I.

λυση



1) Θεωροῦμε ὅτι γύρω ἀπό τήν ἄρθρωση D ἐφαρμόζουν δύο ἴσα καί ἀντίρροπα ζεύγη ροπῶν M. Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης U, πού προκαλεῖται ἀπό τίς φορτίσεις P καί M. Ἡ ἀμοιβαία στροφή τῶν διατομῶν γύρω ἀπό τήν ἄρθρωση D θά εἶναι: $\phi_D = \left(\dfrac{\partial U}{\partial M}\right)_{M=0}$.

Λόγω τῆς φόρτισης P θά ἀναπτυχθεῖ στή ράβδο CD τάση $S_{CD}^{P} = +P$. Ἀπό τήν ἰσορροπία δυνάμεων στό C βρίσκουμε ὅτι οἱ τάσεις τῶν ράβδων AC καί CB θά εἶναι θλιπτικές καί ἴσες ἡ καθεμιά μέ P, $S_{AC}^{P} = S_{CB}^{P} = -P$



Θά βροῦμε τίς τάσεις τῶν ράβδων, πού προκαλοῦνται ἀπό τίς φορτίσεις M. Θεωροῦμε ὅτι τό ἀριστερά ζεῦγος ροπῶν M προκαλεῖται ἀπό δύο ἀντίρροπες δυνάμεις, ἴσες τήν καθεμιά μέ $\frac{M}{a}$ καί ἐφαρμοσμένες στά A καί D. Ἀντίστοιχα γιά τό δεξιά ζεῦγος ροπῶν M. Τότε λόγω τῶν φορτίσεων M θά προκληθεῖ στή ράβδο DC μιά τάση S_{CD}^{M}, ἡ ὁποία εἶναι θλιπτική. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι οἱ δυνάμεις, πού καταπονοῦν τούς κόμβους, ἔχουν ἀντίθετη φορά, ὅταν θεωρηθεῖ ὅτι καταπονοῦν τίς ράβδους. Στό σχῆμα ἡ S_{CD}^{M} εἶναι σχεδιασμένη ὡς πρός τόν κόμβο D. Ὡς πρός τή ράβδο DC θά ἔχει ἀντίθετη φορά, δηλαδή θά εἶναι θλιπτική. Εἶναι λοιπόν: $S_{CD}^{M} = -2\cdot\frac{M}{a}$. Ἀπό τήν ἰσορροπία δυνάμεων στόν κόμβο C παίρνουμε:

$$S_{AC}^{M} = S_{CB}^{M} = -S_{CD}^{M} \Rightarrow S_{AC}^{M} = S_{CB}^{M} = 2\cdot\frac{M}{a} .$$

Οἱ τάσεις τῶν ράβδων λόγω τῶν φορτίσεων P καί M εἶναι:

$$S_{AC} = S_{AC}^{P} + S_{AC}^{M} = -P + 2\cdot\frac{M}{a}$$

$$S_{CD} = S_{CD}^{P} + S_{CD}^{M} = P - 2\cdot\frac{M}{a} .$$

$$S_{CB} = S_{CB}^{P} + S_{CB}^{M} = -P + 2\cdot\frac{M}{a} .$$

Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά κάθε τμῆμα τοῦ φορέα ξεχωριστά.

ράβδος AC

$$U^{S}_{AC} = \frac{S^2_{AC}\cdot \ell_{AC}}{2\cdot A\cdot E} \quad , \quad \ell_{AC} = \frac{\alpha}{\cos 30^\circ} \Rightarrow \ell_{AC} = \frac{2\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}$$

ράβδος CB

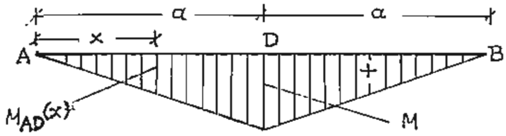
$$U^{S}_{CB} = \frac{S^2_{CB}\cdot \ell_{CB}}{2\cdot A\cdot E} \quad , \quad \ell_{CB} = \frac{\alpha}{\cos 30^\circ} \Rightarrow \ell_{CB} = \frac{2\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}$$

ράβδος CD

$$U^{S}_{CD} = \frac{S^2_{CD}\cdot \ell_{CD}}{2\cdot A\cdot E} \quad , \quad \ell_{CD} = \alpha\cdot \tan 30^\circ \Rightarrow \ell_{CD} = \frac{\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}$$

δοκός AD

$$U^{M}_{AD} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\int_0^\alpha M^2_{AD}(x)\cdot dx \quad , \text{ όπου } \frac{M_{AD}(x)}{x} = \frac{M}{\alpha} \Rightarrow M_{AD}(x) = \frac{M\cdot x}{\alpha}$$



διάγραμμα ροπών κάμψης δοκού AB

δοκός BD

$$U^{M}_{BD} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\int_0^\alpha M^2_{BD}(x)\cdot dx$$, όπου ή ροπή $M_{BD}(x)$ σέ απόσταση x από τό B.

είναι $M_{BD}(x) = \dfrac{M\cdot x}{\alpha}$.

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης U ὅλου τοῦ φορέα εἶναι:

$$U = U^S_{AC} + U^S_{CB} + U^S_{CD} + U^M_{AD} + U^M_{BD} \Rightarrow U = 2\cdot\frac{S^2_{AC}\cdot \ell_{AC}}{2\cdot E\cdot A} + \frac{S^2_{CD}\cdot \ell_{CD}}{2\cdot E\cdot A} + $$

$$+ 2\cdot\frac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\int_0^\alpha M^2_{AD}(x)\cdot dx .$$

Ἔχουμε:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{2\cdot S_{AC}\cdot \frac{\partial S_{AC}}{\partial M}\cdot \ell_{AC}}{E\cdot A} + \frac{2\cdot S_{CD}\cdot\frac{\partial S_{CD}}{\partial M}\cdot \ell_{CD}}{2\cdot E\cdot A} + \frac{1}{E\cdot I}\cdot\int_0^\alpha 2\cdot M_{AD}(x)\cdot\frac{\partial M_{AD}(x)}{\partial M}\cdot dx$$

$$\frac{\partial S_{AC}}{\partial M} = \frac{2}{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial S_{CD}}{\partial M} = -\frac{2}{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial M_{AD}(x)}{\partial M} = \frac{x}{\alpha} \quad , \text{ ὁπότε:}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{2\cdot\left(-P+2\cdot\frac{M}{\alpha}\right)\cdot\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{2\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}}{E\cdot A} + \frac{\left(P-2\cdot\frac{M}{\alpha}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}}{E\cdot A} + \frac{2}{E\cdot I}\cdot\int_0^\alpha \frac{M\cdot x}{\alpha}\cdot\left(\frac{x}{\alpha}\right)\cdot dx \, , (1)$$

Ἡ στροφή ϕ_D θά προκύψει, ἄν στήν (1) θέσουμε $M=0$, ἄρα :

$$\phi_D = \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_{M=0} \Rightarrow \phi_D = \frac{2\cdot(-P)\cdot\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{2\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}}{E\cdot A} + \frac{P\cdot\left(-\frac{2}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}}{E\cdot A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_D = \frac{-10\cdot\sqrt{3}\cdot P}{3\cdot E\cdot A}\ .$$

2)

α. Στήν περίπτωση, πού ή δοκός είναι συνεχής, θεωροῦμε ὡς ὑπερστατικό μέγεθος τή ροπή M_D στό D. Ἡ ἀμοιβαία στροφή στό D είναι μηδενική στήν περίπτωση αὐτή, ὅπότε $\frac{\partial U}{\partial M_D} = 0$. Ἡ παράσταση $\frac{\partial U}{\partial M_D}$ γιά τήν περίπτωση αὐτή θά προκύψει, ἄν θέσουμε στήν (1) $M = M_D$. Εἶναι λοιπόν:

$$\frac{\partial U}{\partial M_D} = 0 \Rightarrow \frac{2\cdot\left(-P+2\cdot\frac{M_D}{\alpha}\right)\cdot\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{2\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}}{E\cdot A} + \frac{\left(P-2\cdot\frac{M_D}{\alpha}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}}{E\cdot A} +$$

$$+\frac{2}{E\cdot I}\cdot\int_0^\alpha \frac{M_D\cdot x}{\alpha}\cdot\left(\frac{x}{\alpha}\right)\cdot dx = 0 \Rightarrow \frac{\left(-P+2\cdot\frac{M_D}{\alpha}\right)\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}}{E\cdot A} + \frac{2}{E\cdot I}\cdot\frac{M_D}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^3}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(-P+2\cdot\frac{M_D}{\alpha}\right)\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}}{E\cdot A} + \frac{2}{3}\cdot\frac{M_D\cdot\alpha}{E\cdot I} = 0 \Rightarrow M_D\cdot\left(\frac{2\cdot\alpha}{3\cdot E\cdot I} + \frac{20}{\sqrt{3}\cdot\alpha\cdot E\cdot A}\right) = \frac{10\cdot P}{\sqrt{3}\cdot E\cdot A}$$

$$\Rightarrow M_D\cdot\frac{2\cdot\alpha^2\cdot A + 20\cdot\sqrt{3}\cdot I}{3\cdot E\cdot A\cdot I\cdot\alpha} = \frac{10\cdot P}{\sqrt{3}\cdot E\cdot A} \Rightarrow M_D = \frac{10\cdot P}{\sqrt{3}\cdot E\cdot A}\cdot\frac{3\cdot E\cdot A\cdot I\cdot\alpha}{2\cdot\alpha^2\cdot A + 20\cdot\sqrt{3}\cdot I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_D = \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot P\cdot\alpha\cdot I}{\alpha^2\cdot A + 10\cdot\sqrt{3}\cdot I}\ .$$

β. ἡ κατακόρυφη μετατόπιση δ_D τοῦ σημείου D εἶναι ἴση μέ τή μερική παράγωγο τῆς U ὡς πρός P, $\delta_D = \frac{\partial U}{\partial P}$. Εἶναι:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2\cdot S_{AC}\cdot\frac{\partial S_{AC}}{\partial P}\cdot \ell_{AC}}{E\cdot A} + \frac{2\cdot S_{CD}\cdot\frac{\partial S_{CD}}{\partial P}\cdot \ell_{CD}}{2\cdot E\cdot A} + \frac{1}{E\cdot I}\cdot\int_0^\alpha 2\cdot M_{AD}(x)\cdot\frac{\partial M_{AD}(x)}{\partial P}\cdot dx$$

$$\frac{\partial S_{AC}}{\partial P} = -1\ ,\quad \frac{\partial S_{CD}}{\partial P} = 1\ ,\quad \frac{\partial M_{AD}(x)}{\partial P} = 0\ ,\ \text{ὁπότε:}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2\cdot\left(-P+2\cdot\frac{M_D}{\alpha}\right)\cdot(-1)\cdot\frac{2\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}}{E\cdot A} + \frac{\left(P-2\cdot\frac{M_D}{\alpha}\right)\cdot 1\cdot\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}}{3}}{E\cdot A} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{5\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot P}{3\cdot E\cdot A} - \frac{10\cdot\sqrt{3}\cdot M_D}{E\cdot A} = \frac{5\cdot\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot P}{3\cdot E\cdot A} - \frac{10\cdot\sqrt{3}}{3\cdot E\cdot A}\cdot\frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot P\cdot\alpha\cdot I}{\alpha^2\cdot A + 10\cdot\sqrt{3}\cdot I} =$$

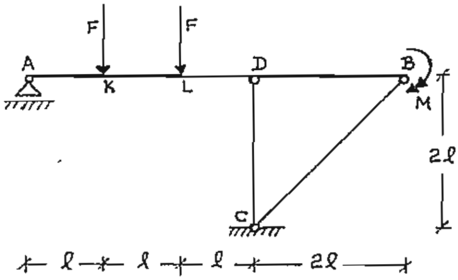
$$= \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot\alpha\cdot P}{3\cdot E\cdot A}\cdot\left[1-\frac{10\cdot\sqrt{3}\cdot I}{\alpha^2\cdot A+10\cdot\sqrt{3}\cdot I}\right] = \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot\alpha\cdot P}{3\cdot E\cdot A}\cdot\frac{\alpha^2\cdot A+10\cdot\sqrt{3}\cdot I-10\cdot\sqrt{3}\cdot I}{\alpha^2\cdot A+10\cdot\sqrt{3}\cdot I} =$$

$$= \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot\alpha\cdot P}{3\cdot E\cdot A}\cdot\frac{\alpha^2\cdot A}{\alpha^2\cdot A+10\cdot\sqrt{3}\cdot I} = \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot\alpha^3\cdot P}{3\cdot E\cdot(\alpha^2\cdot A+10\cdot\sqrt{3}\cdot I)} .$$

Ἡ κατακόρυφη, λοιπόν, μετατόπιση δ_D εἶναι :

$$\delta_D = \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot\alpha^3\cdot P}{3\cdot E\cdot(\alpha^2 A+10\cdot\sqrt{3}\cdot I)} .$$

ασκηση 13

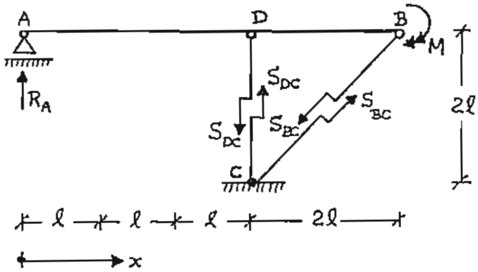


Θεωροῦμε τό φορέα τοῦ σχήματος, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό τή δοκό AB καί τίς ράβδους BC, DC. Ἡ δοκός ἔχει ροπή ἀδράνειας διατομῆς I καί μέτρο ἐλαστικότητας E_1. Οἱ ράβδοι ἔχουν μέτρο ἐλαστικότητας E_2 καί ἐμβαδό διατομῆς A. Στό φορέα ἐφαρμόζουν διαδοχικά ἡ ροπή M στό σημεῖο B καί οἱ δυνάμεις F στά σημεῖα K, L.

Ζητοῦνται: 1) ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τοῦ τμήματος AD, ὅταν ἐνεργεῖ μόνο ἡ ροπή M στό σημεῖο B.

2) ἡ γωνία στροφῆς τοῦ σημείου C τῆς δοκοῦ, ὅταν ἐνεργοῦν μόνο τά φορτία F.

λυση



1) Ὁ ὑπολογισμός θ' ἀρχίσει μέ τήν ἐπίλυση τοῦ φορέα. Ἡ ἐξίσωση ροπῶν ὡς πρός C δίνει :

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow R_A\cdot 3\ell + M = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{M}{3\ell}$$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐξίσωση ροπῶν ὡς πρός B δίνει :

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_A\cdot 5\ell - S_{DC}\cdot 2\ell = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_{DC} = -\dfrac{M}{3\ell}$. Τέλος ἀπό τήν ἰσορροπία δυνάμεων κατά τήν ὁριζόντια διεύθυνση προκύπτει ὅτι ἡ τάση τῆς ράβδου BC εἶναι μηδενική, $S_{BC} = 0$.

Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι : $\dfrac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\dfrac{M(x)}{E_1\cdot I}$, ὅπου $M(x)$ εἶναι ἡ καμπτική ροπή σ' ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς AD, πού ἀπέχει ἀπόσταση x ἀπό τό A. Εἶναι : $M(x) = R_A\cdot x = -\dfrac{M\cdot x}{3\cdot\ell}$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς γίνεται: $E_1 \cdot I \cdot \dfrac{d^2 \upsilon(x)}{dx^2} = \dfrac{M \cdot x}{3 \cdot \ell}$ καί ὁλοκληρώνοντας παίρνουμε: $E_1 \cdot I \cdot \dfrac{d\upsilon(x)}{dx} = \dfrac{M \cdot x^2}{6 \cdot \ell} + c_1$ καί ὁλοκληρώνοντας πάλι ἔχουμε τελικά $E_1 \cdot I \cdot \upsilon(x) = \dfrac{M \cdot x^3}{18 \cdot \ell} + c_1 \cdot x + c_2$ (1)

Οἱ σταθερές c_1, c_2 θά προκύψουν ἀπό τίς ὁριακές συνθῆκες. Στήν κύλιση A ($x=0$) ἡ βύθιση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι μηδενική, $\upsilon_A = 0$, ἑπομένως ἀπό τήν (1) προκύπτει $c_2 = 0$. Στή θέση D ἡ βύθιση τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς εἶναι ἴση μέ τή μεταβολή μήκους $\Delta\ell_{DC}$ τῆς ράβδου DC. Ἡ βύθιση αὐτή θεωρεῖται ἀρνητική, διότι συμβαίνει πάνω ἀπό τόν ἄξονα τῆς δοκοῦ, ἑπομένως $\upsilon_D = -\Delta\ell_{DC}$ (2). Εἶναι ὅμως: $\Delta\ell_{DC} = \dfrac{S_{DC} \cdot \ell_{DC}}{E_2 \cdot A} = -\dfrac{M}{3\ell} \cdot \dfrac{2\ell}{E_2 \cdot A} = -\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{M}{E_2 \cdot A}$ (πρβλ. σελίδα 35).

Ἐπίσης εἶναι: $\upsilon_D = \dfrac{1}{E_1 \cdot I}\left(\dfrac{M \cdot (3\ell)^3}{18 \cdot \ell} + c_1 \cdot 3\ell\right) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{M \cdot \ell^2}{E_1 \cdot I} + \dfrac{3 \cdot c_1 \cdot \ell}{E_1 \cdot I}$.

Ἀντικαθιστώντας τίς τιμές αὐτές στή (2) προκύπτει: $c_1 = M\left(\dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{E_1 \cdot I}{E_2 \cdot A \cdot \ell} - \dfrac{1}{2} \cdot \ell\right)$

Ἡ ἐξίσωση, λοιπόν, τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τοῦ τμήματος AD, ὅταν ἐνεργεῖ μόνο ἡ ροπή M στό σημεῖο B, εἶναι:

$$E_1 \cdot I \cdot \upsilon(x) = \frac{M \cdot x^3}{18 \cdot \ell} + M \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{E_1 \cdot I}{E_2 \cdot A \cdot \ell} - \frac{1}{2} \cdot \ell\right) \quad (3).$$

2) Ἡ γωνία στροφῆς ϕ_C τοῦ σημείου C τῆς δοκοῦ, ὅταν ἐνεργοῦν μόνο τά φορτία F, θά βρεθεῖ μέ **ἐφαρμογή τοῦ** θεωρήματος τοῦ **Betti**. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα αὐτό, ἄν σ' ἕνα σῶμα ἐπιδροῦν δύο ὁμάδες φορτίων (1) καί (2), τότε ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης τῆς ὁμάδας (1) γιά τίς μετακινήσεις, πού ὀφείλονται στά φορτία τῆς ἄλλης ὁμάδας (2), εἶναι ἴση μέ τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης τῶν φορτίων τῆς ὁμάδας (2) γιά τίς μετακινήσεις πού προκαλοῦνται ἀπό τά φορτία τῆς ὁμάδας (1).

Γιά τήν περίπτωσή μας θά θεωρήσουμε ὁμάδα φορτίων (1) τή ροπή M καί ὁμάδα φορτίων (2) τίς δυνάμεις F. Ἡ μετακίνηση τῆς ὁμάδας φορτίων (1), πού ὀφείλεται στήν ὁμάδα φορτίων (2), εἶναι ἡ στροφή ϕ_C, τήν ὁποία ζητοῦμε. Οἱ μετακινήσεις τῆς ὁμάδας φορτίων (2), πού ὀφείλονται στήν ὁμάδα φορτίων (1) εἶναι οἱ βυθίσεις υ_K^M, υ_L^M τῶν σημείων K, L ἀντίστοιχα, πού προκαλοῦνται ἀπό τή ροπή M. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Betti θά ἔχουμε:

$$M \cdot \phi_C = F \cdot \upsilon_K^M + F \cdot \upsilon_L^M \quad (4)$$

Οἱ υ_K^M, υ_L^M μποροῦν νά προκύψουν ἄν θέσουμε στήν (3) $x=\ell$ καί $x=2\ell$ ἀντίστοιχα. Εἶναι:

$$v_K^M = \frac{1}{E_1 \cdot I} \cdot \left[\frac{M \cdot \ell^3}{18 \cdot \ell} + M \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{E_1 \cdot I}{E_2 \cdot A \cdot \ell} - \frac{1}{2} \cdot \ell \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_K^M = \frac{M \ell^2}{18 E_1 I} + \frac{2}{9} \cdot \frac{M}{E_2 A \ell} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M \ell}{E_1 I}$$

$$v_L^M = \frac{1}{E_1 \cdot I} \left[\frac{M \cdot (2\ell)^3}{18 \cdot \ell} + M \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{E_1 \cdot I}{E_2 \cdot A \cdot \ell} - \frac{1}{2} \cdot \ell \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_L^M = \frac{8}{18} \cdot \frac{M \ell^2}{E_1 I} + \frac{2}{9} \cdot \frac{M}{E_2 A \ell} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot \ell}{E_1 I}$$

Θέτοντας τίς τιμές αὐτές στήν (4) ἔχουμε:

$$M \cdot \phi_C = F \left(\frac{9}{18} \cdot \frac{M \ell^2}{E_1 I} + \frac{4}{9} \cdot \frac{M}{E_2 A \ell} - \frac{M \ell}{E_1 I} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_C = F \left(\frac{9}{18} \cdot \frac{\ell^2}{E_1 \cdot I} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{E_2 A \ell} - \frac{\ell}{E_1 I} \right)$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ασκηση 1

Θεωροῦμε ἕνα ἐλαστικό σῶμα σέ κάποια αὐθαίρετη ἐντατική κατάσταση. Ἄς εἶναι $\|\sigma_{ij}\|$ ὁ τανυστής τάσης σέ κάποιο τυχαῖο ἐσωτερικό σημεῖο P. Θεωροῦμε δύο στοιχειώδη ἐπίπεδα $E_{(1)}$ καί $E_{(2)}$, πού περνοῦν ἀπό τό P καί τῶν ὁποίων τά ἀντίστοιχα κάθετα μοναδιαῖα διανύσματα εἶναι $\bar{n}_{(1)}$ καί $\bar{n}_{(2)}$. Ἄς εἶναι $\bar{t}_{(1)}$ καί $\bar{t}_{(2)}$ τά διανύσματα τάσης, πού ἀντιστοιχοῦν στά στοιχειώδη ἐπίπεδα $E_{(1)}$ καί $E_{(2)}$. Τά διανύσματα αὐτά σχηματίζουν ἕνα ἐπίπεδο, τό $E_{(3)}$, τοῦ ὁποίου τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα εἶναι $\bar{n}_{(3)}$. Ἄς εἶναι ἐπίσης $\bar{t}_{(3)}$ τό διάνυσμα τάσης, πού ἀντιστοιχεῖ στό ἐπίπεδο $E_{(3)}$. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό διάνυσμα $\bar{t}_{(3)}$ εἶναι κάθετο πρός τά διανύσματα $\bar{n}_{(1)}$ καί $\bar{n}_{(2)}$.

αποδειξη

Οἱ συνιστῶσες τῶν διανυσμάτων τάσης $\bar{t}_{(1)}$ καί $\bar{t}_{(2)}$ εἶναι ἀντίστοιχα:

$$\underset{(1)}{t}_j = \sigma_{mj}\cdot \underset{(1)}{n}_m \quad , \quad \underset{(2)}{t}_j = \sigma_{mj}\cdot \underset{(2)}{n}_m \quad , \quad (1).$$

Ὅμοια οἱ συνιστῶσες τοῦ διανύσματος τάσης $\bar{t}_{(3)}$ δίνονται ἀπό τή σχέση:

$$\underset{(3)}{t}_m = \sigma_{jm}\cdot \underset{(3)}{n}_j .$$

Τό διάνυσμα $\bar{n}_{(3)}$ εἶναι κάθετο πρός τό ἐπίπεδο $E_{(3)}$, ἐπομένως καί πρός τά διανύσματα $\bar{t}_{(1)}$ καί $\bar{t}_{(2)}$. Θά ἔχουμε λοιπόν:

$$\left.\begin{aligned} \bar{t}_{(1)}\cdot\bar{n}_{(3)} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \underset{(1)}{t}_j\cdot \underset{(3)}{n}_j = 0 \\ \bar{t}_{(2)}\cdot\bar{n}_{(3)} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \underset{(2)}{t}_j\cdot \underset{(3)}{n}_j = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

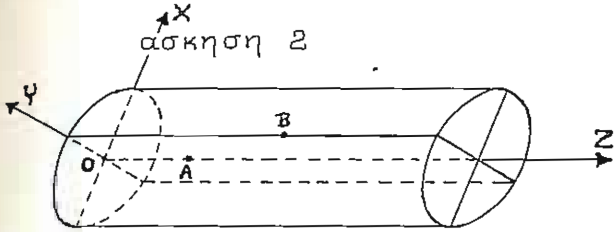
Ἀντικαθιστοῦμε τά $\underset{(1)}{t}_j$, $\underset{(2)}{t}_j$ ἀπό τίς (1) στίς (2) καί ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_{mj}\cdot \underset{(1)}{n}_m\cdot \underset{(3)}{n}_j = 0 \\ \sigma_{mj}\cdot \underset{(2)}{n}_m\cdot \underset{(3)}{n}_j = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_{mj}\cdot \underset{(3)}{n}_j\cdot \underset{(1)}{n}_m = 0 \\ \sigma_{mj}\cdot \underset{(3)}{n}_j\cdot \underset{(2)}{n}_m = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \left(\sigma_{jm}\cdot \underset{(3)}{n}_j\right)\cdot \underset{(1)}{n}_m = 0 \\ \left(\sigma_{jm}\cdot \underset{(3)}{n}_j\right)\cdot \underset{(2)}{n}_m = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \underset{(3)}{t}_m\cdot \underset{(1)}{n}_m = 0 \\ \underset{(3)}{t}_m\cdot \underset{(2)}{n}_m = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{t}_{(3)}\cdot\bar{n}_{(1)} = 0 \\ \bar{t}_{(3)}\cdot\bar{n}_{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Οἱ σχέσεις (3) ἀποδεικνύουν ὅτι τό διάνυσμα $\bar{t}_{(3)}$ εἶναι κάθετο πρός τά διανύσματα $\bar{n}_{(1)}$ καί $\bar{n}_{(2)}$.

ἄσκηση 2



Γιά τήν ἐλλειπτική ἄτρακτο τοῦ σχήματος, ἡ ὁποία καταπονεῖται ἀπό ζεῦγος ροπῶν M_t, ἡ θεωρία ἐλαστικότητας δίνει γιά τίς μετατοπίσεις τή λύση:

$$u = -\frac{M_t(\alpha^2+b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}yz \quad , \quad v = \frac{M_t(\alpha^2+b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}xz \quad , \quad w = -\frac{M_t(\alpha^2-b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}xy \qquad (1)$$

(οἱ μετατοπίσεις u, v, w συμβαίνουν κατά τούς ἄξονες X, Y, Z ἀντίστοιχα)

α. Νά βρεθεῖ ὁ τανυστής παραμόρφωσης.

β. Θεωροῦμε τά σημεῖα $A(0,0,c)$, $B(0,0,2c)$. Νά βρεθεῖ ἡ μεταβολή μήκους τοῦ τμήματος AB.

γ. Θεωροῦμε τό διάνυσμα $\bar{n} = \lambda\bar{i}_1 + \mu\bar{i}_2 + \nu\bar{i}_3$, ὅπου λ, μ, ν εἶναι γνωστοί ἀριθμοί. Νά βρεθεῖ ἡ ἀνηγμένη ἐπιμήκυνση ε_{nn} κατά τήν κατεύθυνση τοῦ $\bar{n}$.

λυση

α. Οἱ παραμορφώσεις ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν μετατοπίσεων ἀπό τίς ἑξῆς σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \ , \ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) , \ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$ Εἶναι: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{M_t(\alpha^2+b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}z$,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{M_t(\alpha^2+b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}y \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{M_t(\alpha^2+b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}z \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{M_t(\alpha^2+b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}x \ , \ \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{M_t(\alpha^2-b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}y \ , \ \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{M_t(\alpha^2-b^2)}{\pi G\alpha^3 b^3}x \ ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ .$$

Ἐπομένως ὁ τανυστής παραμόρφωσης εἶναι:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_t \cdot \alpha^2 \cdot y}{\pi G\alpha^3 b^3} \\ 0 & 0 & \frac{M_t \cdot b^2 \cdot x}{\pi G\alpha^3 b^3} \\ -\frac{M_t \cdot \alpha^2 y}{\pi G\alpha^3 b^3} & \frac{M_t \cdot b^2 \cdot x}{\pi G \cdot \alpha^3 b^3} & 0 \end{Vmatrix}$$

β. Τό σημεῖο A ἔχει τετμημένη καί τεταγμένη μηδενικές ($x_A=0$, $y_A=0$), ὁπότε μέ ἀντικατάσταση στίς (1) προκύπτει ὅτι καί οἱ τρεῖς μετατοπίσεις u_A, v_A, w_A εἶναι μηδενικές, δηλαδή τό σημεῖο A δέν θά ἀλλάξει θέση μετά τήν παραμόρφωση. Τό σημεῖο B ἔχει τετμημένη μηδενική ($x_B=0$), ὁπότε ἀπό τίς (1) προκύπτει ὅτι $v_B = 0$, $w_B = 0$, δηλαδή τό σημεῖο B ἔχει μετά τήν παραμόρφωση τεταγμένη καί κατηγμένη τίς ἴδιες, πού εἶχε καί πρίν τήν παραμόρφωση. Ἀντίθετα ἡ τετμημένη τοῦ σημείου B θά μεταβληθεῖ, καί μάλιστα ἀπό μηδενική, πού ἦταν πρίν τήν παραμόρφωση, θά ἔχει μετά τήν παραμόρφωση τιμή ἴση μέ $x_B' = u_B = -\dfrac{M_t\cdot(\alpha^2+b^2)}{\pi G \alpha^3 b^3}\alpha\cdot 2c$, ὅπως προκύπτει ἄν στίς (1) γίνει ἡ ἀντικατάσταση: $y_B = \alpha$, $z_B = 2c$.

Τό ἀρχικό μῆκος τοῦ τμήματος AB ἦταν:

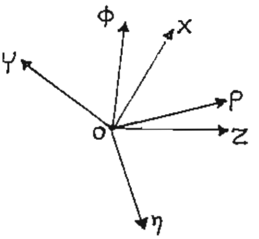
$$\ell_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (\alpha - 0)^2 + (2c-c)^2} = \sqrt{\alpha^2 + c^2}$$

Μετά τήν παραμόρφωση τό τμῆμα AB ἔχει μῆκος:

$$\ell'_{AB} = \sqrt{(x_B' - x_A')^2 + (y_B' - y_A')^2 + (z_B' - z_A')^2} = \sqrt{\left(-\frac{2\cdot M_t\cdot c\cdot(\alpha^2+b^2)}{\pi G \alpha^2 b^3} - 0\right)^2 + (\alpha - 0)^2 + (2c-c)^2} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{2\cdot M_t\cdot c\cdot(\alpha^2+b^2)}{\pi G \alpha^2 b^3}\right]^2 + \alpha^2 + c^2}$$

Ἡ μεταβολή μήκους τοῦ τμήματος AB εἶναι $\Delta\ell_{AB} = \ell'_{AB} - \ell_{AB}$.

γ. 

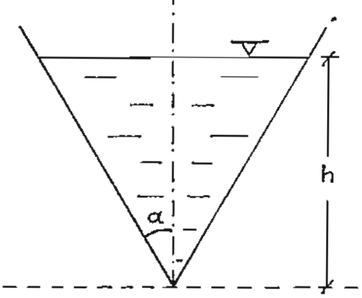
Γνωρίζουμε τήν ἔκφραση τοῦ τανυστῆ παραμόρφωσης στό σύστημα συντεταγμένων XYZ. Ζητοῦμε τήν ἀνηγμένη ἐπιμήκυνση κατά τήν κατεύθυνση τοῦ διανύσματος $\bar{\eta}$. Τό $\bar{\eta}$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἀποτελεῖ ἕναν ἀπό τούς ἄξονες ἑνός ὀρθογωνίου συστήματος (η, p, ϕ). Γιά νά βροῦμε τήν $\varepsilon_{\eta\eta}$ χρειαζόμαστε μόνο τήν πρώτη γραμμή τοῦ μητρώου μετασχηματισμοῦ, πού ἀποτελεῖται ἀπό τά συνημίτονα κατεύθυνσης λ, μ, ν τοῦ διανύσματος $\bar{\eta}$. (Στά ὀρθογώνια συστήματα συντεταγμένων τά συνημίτονα κατεύθυνσης ἑνός διανύσματος ἀποτελοῦν καί τίς συντεταγμένες του). Διατάσσοντας τίς πράξεις σύμφωνα μέ τό σχῆμα Falk, ἔχουμε:

			0	0	ε_{xz}	λ	
			0	0	ε_{yz}	μ	
			ε_{xz}	ε_{yz}	0	ν	
λ	μ	ν	$\nu\cdot\varepsilon_{xz}$	$\nu\cdot\varepsilon_{yz}$	$\lambda\cdot\varepsilon_{xz} + \mu\cdot\varepsilon_{yz}$	$\nu\cdot\varepsilon_{xz}\cdot\lambda + \nu\cdot\varepsilon_{yz}\cdot\mu + (\lambda\cdot\varepsilon_{xz} + \mu\cdot\varepsilon_{yz})\cdot\nu$	← $\varepsilon_{\eta\eta}$

Ἑπομένως ἡ ἀνηγμένη ἐπιμήκυνση $\varepsilon_{\eta\eta}$ εἶναι: $\varepsilon_{\eta\eta} = 2\cdot\nu\cdot(\lambda\cdot\varepsilon_{xz} + \mu\cdot\varepsilon_{yz})$.

Γιά τό τελευταῖο ἐρώτημα πρβλ. καί στίς σελίδες 16, 17, 18.

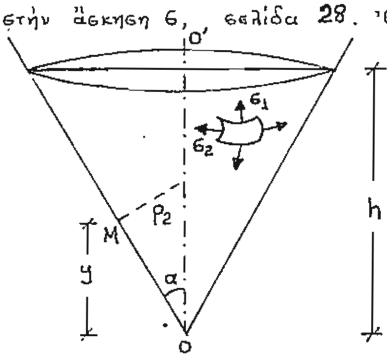
άσκηση 3



Λεπτότοιχο ἀνοιχτό κωνικό δοχεῖο γεμίζεται μέ ὑγρό εἰδικοῦ βάρους γ, ὅπως στό σχῆμα.
Νά βρεθοῦν οἱ μέγιστες τάσεις, πού ἀναπτύσσονται στά τοιχώματα τοῦ δοχείου καί οἱ θέσεις στίς ὁποῖες ἀναπτύσσονται οἱ μέγιστες αὐτές τάσεις.
Στή λύση τοῦ προβλήματος δέν θά ληφθεῖ ὑπ' ὄψη τό ἴδιο βάρος τοῦ δοχείου.

λύση

Θά χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο $\dfrac{\sigma_1}{\rho_1}+\dfrac{\sigma_2}{\rho_2}=\dfrac{P}{t}$, πού ἀποδείξαμε στήν ἄσκηση 6, σελίδα **28**. Ἐπειδή ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας ρ_1 τοῦ ἄξονα

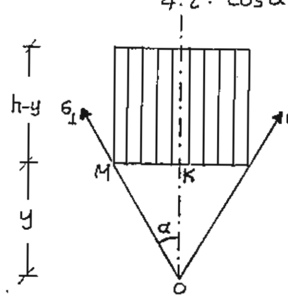


OO' τοῦ κώνου εἶναι $\rho_1=\infty \Rightarrow \dfrac{\sigma_1}{\rho_1}=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\sigma_2}{\rho_2}=\dfrac{P}{t} \Rightarrow \sigma_2=\dfrac{P\cdot\rho_2}{t}$.

Σέ ὕψος y ἡ ὑδροστατική πίεση P εἶναι $P=\gamma\cdot(h-y)$. Ἐπίσης εἶναι $\rho_2=OM\cdot\tan\alpha$ $=\dfrac{y}{\cos\alpha}\cdot\tan\alpha$. Ἡ τάση, λοιπόν, σ_2, εἶναι: $\sigma_2=\dfrac{\gamma\cdot(h-y)\cdot y\cdot\tan\alpha}{t\cdot\cos\alpha}$.

Ἡ σ_2 γίνεται μέγιστη γιά $\dfrac{d\sigma_2}{dy}=0 \Rightarrow \dfrac{d}{dy}\cdot\left[\dfrac{\gamma\cdot\tan\alpha\cdot(h\cdot y-y^2)}{t\cdot\cos\alpha}\right]=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\gamma\cdot\tan\alpha\cdot(h-2y)}{t\cdot\cos\alpha}=0 \Rightarrow h-2y=0 \Rightarrow y=\dfrac{h}{2}$. Ἡ μέγιστη σ_2 εἶναι:

$$\sigma_{2\,max.}=\frac{\gamma\cdot h^2\cdot\tan\alpha}{4\cdot t\cdot\cos\alpha}.$$



Στή θέση y τό βάρος τοῦ ὑγροῦ εἶναι:
$W=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot(MK)^2\cdot OK\cdot\gamma=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot(y\cdot\tan\alpha)^2\cdot y\cdot\gamma$.

Στή θέση y ἡ δύναμη, πού προέρχεται ἀπό τήν ὑδροστατική πίεση τοῦ ὑπερκείμενου ὑγροῦ, εἶναι:
$H=\gamma\cdot(h-y)\cdot\pi\cdot(MK)^2=\gamma\cdot(h-y)\cdot\pi\cdot(y\cdot\tan\alpha)^2$.

Οἱ δυνάμεις W καί H ἐξισορροποῦνται ἀπό τή συνισταμένη δύναμη τῶν κατακορύφων συνιστωσῶν τῶν σ_1. Ἡ δύναμη αὐτή εἶναι: $F=2\cdot\pi\cdot(MK)\cdot t\cdot\sigma_1\cdot\cos\alpha=2\cdot\pi\cdot(y\cdot\tan\alpha)\cdot t\cdot\sigma_1\cdot\cos\alpha$.

Θά ἔχουμε λοιπόν : $W + H = F \Rightarrow$

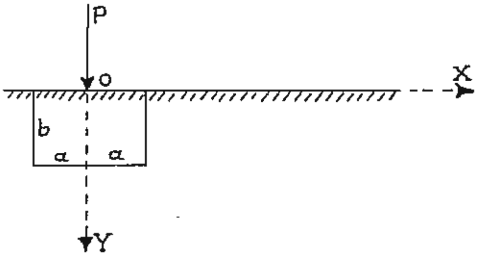
$$\frac{1}{3}\cdot \pi\cdot(y\cdot \tan\alpha)^2\cdot y\cdot \gamma + \gamma\cdot(h-y)\cdot \pi\cdot(y\cdot\tan\alpha)^2 = 2\cdot\pi\cdot(y\cdot\tan\alpha)\cdot t\cdot \sigma_1\cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{y^2\cdot\gamma\cdot\tan\alpha + 3\cdot y\cdot(h-y)\cdot\gamma\cdot\tan\alpha}{6\cdot t\cdot\cos\alpha} .$$

Τή μέγιστη σ_1 παίρνουμε γιά $\frac{d\sigma_1}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{2\cdot y\cdot\gamma\cdot\tan\alpha + 3\cdot(h-2y)\cdot\gamma\cdot\tan\alpha}{6\cdot t\cdot\cos\alpha} = 0$

$$\Rightarrow 2\cdot y + 3\cdot(h-2\cdot y) = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}\cdot h \quad \text{καί} \quad \sigma_{1\,max.} = \frac{3\cdot\gamma\cdot h^2\cdot\tan\alpha}{16\cdot t\cdot\cos\alpha} .$$

ασκηση 4



Δίνεται ὅτι ἡ συνάρτηση $\phi(x,y) = -\frac{P}{\pi}\cdot\left(y - x\cdot\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ λύνει τό πρόβλημα τοῦ ἡμιάπειρου δίσκου τοῦ σχήματος γιά τή μοναχική φόρτιση P.

α. Νά βρεθοῦν οἱ τάσεις σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}.

β. Νά σχεδιαστοῦν οἱ δυνάμεις, πού καταπονοῦν τό ὀρθογώνιο διαστάσεων $(b, 2\cdot a)$ τοῦ σχήματος καί νά γραφτοῦν οἱ ἐξισώσεις ἰσορροπίας, πού πρέπει νά ἱκανοποιοῦν οἱ δυνάμεις αὐτές.

λυση

α. Στό πρόβλημά μας δίνεται ὅτι ἡ ϕ εἶναι τασική συνάρτηση. Οἱ τάσεις σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} εἶναι ἀντίστοιχα:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} , \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\cdot\partial y}$$

Εἶναι : $\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{P}{\pi}\cdot\left(1 - x\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\right) = -\frac{P}{\pi}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{P}{\pi}\cdot\left[-\tan^{-1}\frac{y}{x} - x\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = -\frac{P}{\pi}\cdot\left(-\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\right) .$$

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = -\frac{P}{\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \sigma_{xx} = -\frac{2\cdot P}{\pi}\cdot\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = -\frac{P}{\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(-\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= -\frac{P}{\pi}\cdot\left[-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + y\cdot\frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right] =$$

$$= -\frac{P}{\pi}\cdot\left[\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{y^3-x^2\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right] = -\frac{P}{\pi}\cdot\left[\frac{y\cdot x^2+y^3+y^3-x^2\cdot y}{(x^2+y^2)^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{yy} = -\frac{2\cdot P}{\pi}\cdot\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad (2).$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\cdot\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{P}{\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(-\tan^{-1}\frac{y}{x}+\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{P}{\pi}\cdot\left[-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}+x\cdot\frac{(x^2+y^2)-2\cdot y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{P}{\pi}\cdot\left[-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x^3-x\cdot y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{P}{\pi}\cdot\left[\frac{-x^3-x\cdot y^2+x^3-x\cdot y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \Rightarrow \sigma_{xy} = -\frac{2\cdot P}{\pi}\cdot\frac{x\cdot y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad (3).$$

β. Γιά νά βροῦμε τίς φορές τῶν τάσεων, πού καταπονοῦν τίς πλευρές τοῦ ὀρθογωνίου, ἀντικαθιστοῦμε τήν ἐξίσωση κάθε πλευρᾶς ἤ τμήματος μιᾶς πλευρᾶς στίς σχέσεις (1), (2) καί (3). Ἔτσι γιά τίς σ^{δ}_{xy} ἔχουμε:

$$x = \alpha \quad , \quad 0 \le y \le b \quad , \quad \sigma^{\delta}_{xy} = -\frac{2\cdot P}{\pi}\cdot\frac{\alpha\cdot y^2}{(\alpha^2+y^2)^2}.$$

Ὅμοια γιά τίς σ^{α}_{xy} ἔχουμε:

$$x = -\alpha \quad , \quad 0 \le y \le b \quad , \quad \sigma^{\alpha}_{xy} = -\frac{2\cdot P}{\pi}\cdot\frac{(-\alpha)\cdot y^2}{[(-\alpha)^2+y^2]^2} \Rightarrow \sigma^{\alpha}_{xy} = \frac{2\cdot P}{\pi}\cdot\frac{\alpha\cdot y^2}{(\alpha^2+y^2)^2}$$

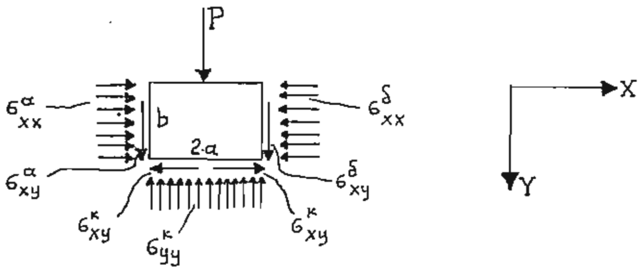
Ἐντελῶς ἀντίστοιχα γιά τό δεξιά τμῆμα τῶν σ^{κ}_{xy} ἔχουμε:

$$y = b \quad , \quad 0 \le x \le \alpha \quad , \quad \sigma^{\kappa}_{xy} = -\frac{2\cdot P}{\pi}\cdot\frac{x\cdot b^2}{(x^2+b^2)^2} \; ,$$

ἐνῶ γιά τό ἀριστερά τμῆμα τῶν σ^{κ}_{xy}, στό **όποῖο** $y = b$, $-\alpha \le x \le 0$, οἱ σ^{κ}_{xy} θά ἔχουν ἀντίθετη φορά ἀπό ὅτι στό δεξιά τμῆμα.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τή σύμβαση γιά τίς θετικές ὀρθές καί διατμητικές τάσεις τήν ἔχουμε κάνει στή σελίδα 20.

Μέ βάση τά παραπάνω σχεδιάζουμε εὔκολα τίς δυνάμεις, πού καταπονοῦν τό ὀρθογώνιο διαστάσεων $(b,\ 2\cdot\alpha)$.



Ἡ ἰσορροπία δυνάμεων κατά τόν ἄξονα X δίνει:

$$\Sigma\sigma^{\delta}_{xx} + \Sigma\sigma^{\alpha}_{xx} + \Sigma\sigma^{\kappa}_{xy} = 0$$

῾Η ἰσορροπία δυνάμεων κατά τόν ἄξονα Y δίνει:

$$P + \Sigma\, \sigma^{\kappa}_{yy} + \Sigma\, \sigma^{\delta}_{xy} + \Sigma\, \sigma^{a}_{xy} = 0$$

Οἱ δεῖχτες δ, α, κ σημαίνουν ἀντίστοιχα δεξιά, ἀριστερά, κάτω.

ασκηση 5

Γιά ἕνα ἐλαστικό σῶμα νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης U εἶναι ἴση μέ τό μισό τοῦ ἔργου, πού θά ἐκτελοῦσαν οἱ ἐξωτερικές δυνάμεις, ἄν οἱ πραγματικές μετακινήσεις τῶν ἀντίστοιχων σημείων ἐφαρμογῆς τους ἦταν σταθερές, δηλαδή ἀνεξάρτητες τοῦ φορτίου, νά ἀποδειχτεῖ δηλαδή ὅτι: $U = \frac{1}{2}\cdot\oint_S \bar{t}\cdot\bar{u}\cdot ds + \frac{1}{2}\cdot\int_V \bar{F}\cdot\bar{u}\cdot dV$,

ὅπου $\bar{t}$ καί $\bar{F}$ τά διανύσματα ἐπιφανειακῶν φορτίων καί μαζικῶν δυνάμεων ἀντίστοιχα, $\bar{u}$ τό διάνυσμα τῆς μετατόπισης τῶν ἐξωτερικῶν* δυνάμεων, S ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείει τό ἐλαστικό σῶμα καί V ὁ ὄγκος τοῦ σώματος.

υποδειξη. Νά χρησιμοποιηθεῖ τό θεώρημα τοῦ Green, πού μετασχηματίζει ἕνα κλειστό ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα σέ τριπλό. Γιά ἕνα διανυσματικό πεδίο $\bar{a}$, πού ὁρίζεται στόν ὄγκο V, ὁ ὁποῖος περικλείεται ἀπό τήν κλειστή ἐπιφάνεια S, τό θεώρημα αὐτό ἐκφράζεται ἀπό τή σχέση:

$$\oint_S \bar{n}\cdot\bar{a}\cdot ds = \int_V \mathrm{div}\,\bar{a}\cdot dV = \int_V \frac{\partial a_m}{\partial x_m}\cdot dV ,$$

ὅπου $\bar{n}$ τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα σέ μιά τομή τοῦ πεδίου.

αποδειξη

῾Η ἐνέργεια παραμόρφωσης U εἶναι: $U = \frac{1}{2}\cdot\int_V \sigma_{im}\cdot\varepsilon_{im}\cdot dV$

ὅπου σ_{im}, ε_{im} οἱ συνιστῶσες τῶν τανυστῶν τάσης καί παραμόρφωσης ἀντίστοιχα. Θά ἀποδείξουμε, λοιπόν, ὅτι:

$$\frac{1}{2}\cdot\oint_S \bar{t}\cdot\bar{u}\cdot ds + \frac{1}{2}\cdot\int_V \bar{F}\cdot\bar{u}\cdot dV = \frac{1}{2}\cdot\int_V \sigma_{im}\cdot\varepsilon_{im}\cdot dV .$$

Οἱ συνιστῶσες τοῦ διανύσματος ἐπιφανειακῆς φόρτισης $\bar{t}$ σέ μιά τομή τοῦ σώματος, τῆς ὁποίας τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα εἶναι $\bar{n}$, δίνονται ἀπό τή σχέση $t_m = n_m\cdot\sigma_{mi}$, ὅπου n_m οἱ συνιστῶσες τοῦ διανύσματος $\bar{n}$. Θά μετασχηματίσουμε τό κλειστό ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα $\oint_S \bar{t}\cdot\bar{u}\cdot ds$ σέ ὁλοκλήρωμα στόν ὄγκο V (σέ τριπλό ὁλοκλήρωμα).

---

* ὡς ἐξωτερικές δυνάμεις θεωροῦμε τά ἐπιφανειακά φορτία καί τίς μαζικές δυνάμεις.

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Green θά ἔχουμε:

$$\oint_S \bar{t}\cdot\bar{u}\cdot ds = \oint_S t_i \cdot u_i \cdot ds = \oint_S n_m \cdot \sigma_{mi} \cdot u_i \cdot ds = \int_V \frac{\partial(\sigma_{mi}\cdot u_i)}{\partial x_m}\cdot dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial \sigma_{mi}}{\partial x_m}\cdot u_i \cdot dV + \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot \sigma_{mi}\cdot dV .$$

Τό πρῶτο, λοιπόν, μέλος τῆς σχέσης, πού ἔχουμε νά ἀποδείξουμε, γράφεται:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\oint_S \bar{t}\cdot\bar{u}\cdot ds + \frac{1}{2}\cdot\int_V \bar{F}\cdot\bar{u}\cdot dV = \frac{1}{2}\cdot\int_V \frac{\partial\sigma_{mi}}{\partial x_m}\cdot u_i\cdot dV + \frac{1}{2}\cdot\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi}\cdot dV$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\int_V F_i\cdot u_i\cdot dV \Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot\int_V\left(\frac{\partial\sigma_{mi}}{\partial x_m} + F_i\right)\cdot u_i\cdot dV + \frac{1}{2}\cdot\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi}\cdot dV .$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις ἰσορροπίας ἔχουμε ὅτι: $F_i + \dfrac{\partial\sigma_{mi}}{\partial x_m} = 0$,

ἐπομένως; $A = \dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi}\cdot dV$ (1).

Θά χρησιμοποιήσουμε τήν ἰδιότητα τῶν ἀέργων (ἐπαναλαμβανομένων) δεικτῶν νά ἀντικαθίστανται μέ ὁποιοδήποτε διαφορετικό ζεῦγος δεικτῶν. Ἔτσι, ἄν στή σχέση $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi}$ ἀντικαταστήσουμε τό δείκτη i μέ m καί τό δείκτη m μέ i, θά ἔχουμε: $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi} = \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\cdot\sigma_{im}$.
Ἡ (1) λοιπόν γράφεται:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi}\cdot dV = \frac{1}{2}\cdot\int_V \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi} + \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi}\right)\cdot dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\cdot\sigma_{im}\right)\cdot dV,$$ καί ἐπειδή ὁ τανυστής τάσης εἶναι συμμετρικός, θά ἔχουμε $\sigma_{mi} = \sigma_{im}$, ὁπότε $A = \dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\int_V \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\cdot\sigma_{im} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\cdot\sigma_{im}\right)\cdot dV =$

$$= \frac{1}{2}\int_V \frac{1}{2}\cdot\sigma_{im}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\cdot dV \qquad (2)$$

Εἶναι ὅμως: $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_m} + \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{im}$, καί ἐπομένως ἡ (2) γράφεται:

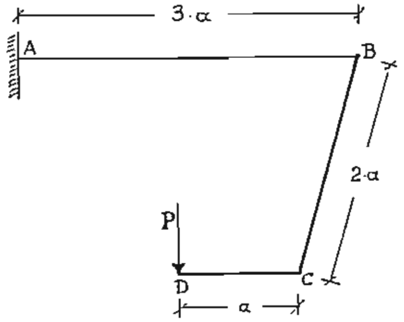
$$A = \frac{1}{2}\cdot\int_V \sigma_{im}\cdot\varepsilon_{im}\cdot dV \qquad (3)$$

Ὅπως εἴπαμε καί στήν ἀρχή, ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης U εἶναι:

$$U = \frac{1}{2}\cdot\int_V \sigma_{im}\cdot\varepsilon_{im}\cdot dV \qquad (4)$$

Συγκρίνοντας τίς (3) καί (4) καί ἀντικαθιστώντας τό A μέ τό ἴσο του παίρνουμε: $\dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\oint_S \bar{t}\cdot\bar{u}\cdot ds + \frac{1}{2}\cdot\int_V \bar{F}\cdot\bar{u}\cdot dV = U$

ασκηση 6.

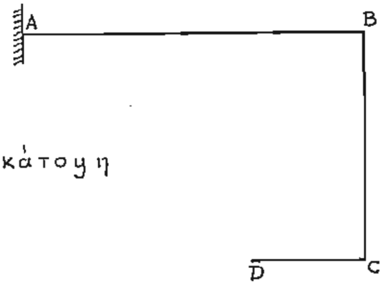


Θεωροῦμε τή δοκό ABCD τοῦ σχήματος, τῆς ὁποίας τά τμήματα AB καί DC εἶναι κάθετα πρός τό BC. Ἡ δοκός εἶναι πακτωμένη στό σημεῖο A καί δέχεται στό D τό κατακόρυφο φορτίο P. Ἡ διατομή τῆς δοκοῦ εἶναι κυκλική μέ ἀκτίνα r.

α. Νά κατασκευασθοῦν τά διαγράμματα ροπῶν κάμψης καί ροπῶν στρέψης,

β. Νά ἐξετασθεῖ ἡ ἰσορροπία ροπῶν στό σημεῖο B,

γ. Νά βρεθεῖ ἡ κατακόρυφη μετατόπιση, πού προκαλεῖ στό D τό φορτίο P.



κάτοψη

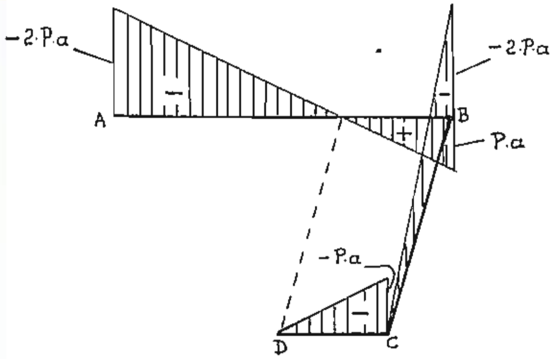
λυση

α. Γιά τήν κατασκευή τῶν διαγραμμάτων ροπῶν κάμψης καί ροπῶν στρέψης παρατηροῦμε τά ἑξῆς. Γιά νά βροῦμε τήν καμπτική ροπή, πού προκαλεῖ ἡ P σ' ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς δοκοῦ, θεωροῦμε ἕνα ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τό ὑπ' ὄψη σημεῖο καί εἶναι κάθετο πρός τόν ἄξονα τῆς δοκοῦ. Τό μέτρο τῆς καμπτικῆς ροπῆς, πού προκαλεῖ ἡ P στό θεωρούμενο σημεῖο, εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς P ἐπί τήν ἀπόστασή της ἀπό τό ἐπίπεδο, πού ἀναφέραμε πρίν. Ἀντίστοιχα τό μέτρο τῆς στρεπτικῆς ροπῆς, πού προκαλεῖ ἡ P σ' ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς δοκοῦ, θά εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς P ἐπί τήν ἀπόστασή της ἀπό τόν ἄξονα τῆς δοκοῦ, πού περνᾶ ἀπό τό θεωρούμενο σημεῖο. Μέ βάση τά παραπάνω βρίσκουμε τήν καμπτική καί στρεπτική ροπή σέ χαρακτηριστικές θέσεις τῆς δοκοῦ. Εἶναι:

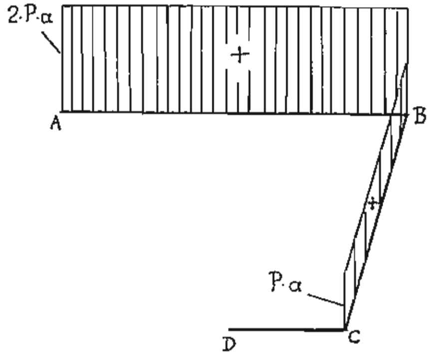
$$M_C^{DC} = -P\cdot\alpha \;,\quad M_C^{CB} = 0 \;,\quad M_B^{CB} = -2\cdot P\cdot\alpha \;,\quad M_B^{BA} = P\cdot\alpha \;,\quad M_A^{BA} = -2\cdot P\cdot\alpha$$

$$M_{t_C}^{CB} = M_{t_B}^{CB} = P\cdot\alpha \;,\quad M_{t_B}^{BA} = M_{t_A}^{BA} = 2\cdot P\cdot\alpha$$

Μποροῦμε, λοιπόν, νά κατασκευάσουμε εὔκολα τά διαγράμματα ροπῶν κάμψης καί ροπῶν στρέψης.



διάγραμμα ροπῶν κάμψης



διάγραμμα ροπῶν στρέψης

β. Θά πρέπει τό <u>διανυσματικό</u> ἄθροισμα τῶν ροπῶν κάμψης καί στρέψης γιά τό σημεῖο B τοῦ τμήματος BC νά εἶναι ἴσο μέ τό <u>διανυσματικό</u> ἄθροισμα τῶν ροπῶν κάμψης καί στρέψης γιά τό σημεῖο B τοῦ τμήματος BA. Ἔχουμε: $\Sigma \overline{M}_B^{BC} = 2\cdot\overline{P\cdot a} + P\cdot\overline{a}$, $\Sigma \overline{M}_B^{BA} = \overline{P\cdot a} + 2\cdot P\cdot\overline{a}$, καί ἑπομένως $\Sigma \overline{M}_B^{BC} = \Sigma \overline{M}_B^{BA}$.

γ. Ἡ κατακόρυφη μετατόπιση δ_D τοῦ σημείου D λόγω τοῦ φορτίου P θά εἶναι ἴση μέ τή μερική παράγωγο τῆς ἐνέργειας παραμόρφωσης U ὅλης τῆς δοκοῦ ὡς πρός P , $\delta_D = \dfrac{\partial U}{\partial P}$.

Τμῆμα DC

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό D εἶναι $M_{DC}(x) = -P\cdot x$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης τοῦ τμήματος αὐτοῦ εἶναι :

$$U_{DC} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^a M^2_{DC}(x)\cdot dx$$

Τμῆμα CB.

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό C εἶναι $M_{CB}(x) = -P\cdot x$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης εἶναι :

$$U^M_{CB} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{2a} M^2_{CB}(x)\cdot dx$$

Στό τμῆμα αὐτό ἔχουμε καί στρεπτική ροπή $M_{t_{CB}} = P\cdot a$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω στρέψης εἶναι :

$$U^{Mt}_{CB} = \frac{M^2_{tCB}\cdot \ell_{CB}}{2\cdot D}$$

. D εἶναι ἡ στρεπτική δυσκαμψία τῆς διατομῆς καί $D = I_p\cdot G$, ὅπου G τό μέτρο στρέψης καί I_p ἡ πολική ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς. Εἶναι λοιπόν : $U^{Mt}_{CB} = \dfrac{M^2_{tCB}\cdot 2\cdot a}{2\cdot D}$.

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα CB εἶναι :

$$U_{CB} = U^{M}_{CB} + U^{M_t}_{CB} \Rightarrow U_{CB} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{2\alpha} M^2_{CB}(x)\cdot dx + \frac{M^2_{t_{CB}}\cdot\alpha}{D}$$

Τμῆμα **BA**

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό B εἶναι $M_{BA}(x) = P\cdot\alpha - P\cdot x$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης εἶναι :

$$U^{M}_{BA} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{3\alpha} M^2_{BA}(x)\cdot dx$$

Στό τμῆμα αὐτό ἔχουμε καί στρεπτική ροπή $M_{t_{BA}} = 2\cdot P\cdot\alpha$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω στρέψης εἶναι :

$$U^{M_t}_{BA} = \frac{M^2_{t_{BA}}\cdot \ell_{BA}}{2\cdot D} = \frac{M^2_{t_{BA}}\cdot 3\cdot\alpha}{2\cdot D}$$

Ἡ συνολική ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα BA εἶναι :

$$U_{BA} = U^{M}_{BA} + U^{M_t}_{BA} \Rightarrow U_{BA} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{3\alpha} M^2_{BA}(x)\cdot dx + \frac{3}{2}\cdot\frac{M^2_{t_{BA}}\cdot\alpha}{D}$$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης ὅλης τῆς δοκοῦ εἶναι :

$$U = U_{DC} + U_{CB} + U_{BA} \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{\alpha} M^2_{DC}(x)\cdot dx + \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{2\alpha} M^2_{CB}(x)\cdot dx + \frac{M^2_{t_{CB}}\cdot\alpha}{D} + \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{3\alpha} M^2_{BA}(x)\cdot dx +$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{M^2_{t_{BA}}\cdot\alpha}{D}$$. Ἔχουμε : $$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{\alpha} 2\cdot M_{DC}(x)\cdot\frac{\partial M_{DC}(x)}{\partial P}\cdot dx +$$

$$+\frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{2\alpha} 2\cdot M_{CB}(x)\cdot\frac{\partial M_{CB}(x)}{\partial P}\cdot dx + \frac{2\cdot M_{t_{CB}}\cdot\frac{\partial M_{t_{CB}}}{\partial P}\cdot\alpha}{D} +$$

$$+\frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{3\alpha} 2\cdot M_{BA}(x)\cdot\frac{\partial M_{BA}(x)}{\partial P}\cdot dx + \frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot M_{t_{BA}}\cdot\frac{\partial M_{t_{BA}}}{\partial P}\cdot\alpha}{D}$$

$$\frac{\partial M_{DC}(x)}{\partial P} = -x\ ,\quad \frac{\partial M_{CB}(x)}{\partial P} = -x\ ,\quad \frac{\partial M_{t_{CB}}}{\partial P} = \alpha\ ,\quad \frac{\partial M_{BA}(x)}{\partial P} = \alpha - x\ ,\quad \frac{\partial M_{t_{BA}}}{\partial P} = 2\alpha ,$$

ὁπότε : $$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{\alpha}(-P\cdot x)\cdot(-x)\cdot dx + \frac{1}{E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^{2\alpha}(-P\cdot x)\cdot(-x)\cdot dx + \frac{2\cdot P\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha}{D} +$$

$$+\frac{1}{E\cdot I_{zz}}\int_0^{3\alpha}(P\cdot\alpha - P\cdot x)\cdot(\alpha - x)\cdot dx + \frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot 2\cdot P\cdot\alpha\cdot 2\cdot\alpha\cdot\alpha}{D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{6\cdot P\cdot\alpha^3}{E\cdot I_{zz}} + \frac{14\cdot P\cdot\alpha^3}{D}$$

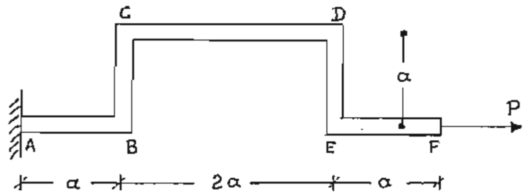
Εἶναι : $I_{zz} = I_{yy} = \frac{\pi\cdot r^4}{4}$, $D = I_p\cdot G$, $I_p = I_{yy} + I_{zz} = \frac{\pi\cdot r^4}{2}$ καί

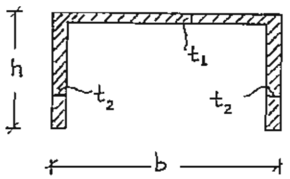
ἑπομένως $$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{24\cdot P\cdot\alpha^3}{E\cdot\pi\cdot r^4} + \frac{28\cdot P\cdot\alpha^3}{G\cdot\pi\cdot r^4}$$.

Ἡ κατακόρυφη, λοιπόν, μετατόπιση τοῦ D εἶναι :

$$\delta_D = \frac{24 \cdot P \cdot a^3}{E \cdot \pi \cdot r^4} + \frac{14 \cdot P \cdot a^3}{G \cdot P \cdot r^4}$$

ασκηση 7





διατομή τοῦ προβόλου

Θεωροῦμε τόν πρόβολο τοῦ σχήματος, ὁ ὁποῖος εἶναι πακτωμένος στό A καί δέχεται στό σημεῖο F τό ἀξονικό φορτίο P. Ὁ πρόβολος ἔχει διατομή μέ σχῆμα ⊓.

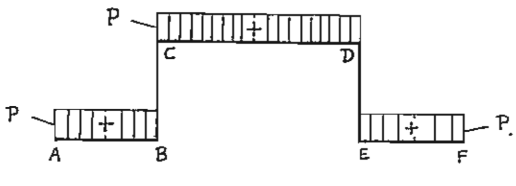
α. Νά κατασκευασθοῦν τά διαγράμματα ἀξονικῶν δυνάμεων, τεμνουσῶν δυνάμεων καί καμπτικῶν ροπῶν.

β. Νά βρεθεῖ ἡ ὁριζόντια μετακίνηση τοῦ σημείου F σάν συνάρτηση τῶν P, a, E, I_{zz}. Στήν ἔκφραση γιά τή μετατόπιση δέν θά ληφθοῦν ὑπ' ὄψη τά ἀποτελέσματα τοῦ ἐφελκυσμοῦ, ἀλλά μόνο τῆς κάμψης.

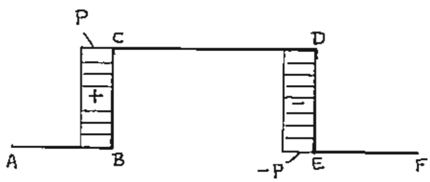
γ. Νά κατασκευασθεῖ τό διάγραμμα ὀρθῶν τάσεων γιά μιά τυχοῦσα διατομή, πού βρίσκεται ἀνάμεσα στά σημεῖα C καί D.

Γιά ἀριθμητική ἐφαρμογή στό γ. ἐρώτημα δίνονται : $P = 2{,}5\ t$, $a = 1 m$, $h = 16\ cm$, $b = 30\ cm$, $t_1 = 1{,}1\ cm$, $t_2 = 2\ cm$, $E = 2{,}1 \cdot 10^6\ Kp/cm^2$.

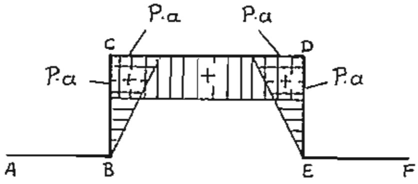
λυση



διάγραμμα ἀξονικῶν δυνάμεων



διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων



διάγραμμα καμπτικῶν ροπῶν

β. Ἄς εἶναι U ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης ὅλου τοῦ προβόλου, πού προκαλεῖται ἀπό τή δύναμη P. Ἡ ὁριζόντια μετατόπιση δ_F τοῦ σημείου F θά εἶναι: $\delta_F = \dfrac{\partial U}{\partial P}$. Θά βροῦμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης, πού προκαλεῖται ἀπό τή δύναμη P, γιά καθένα ἀπό τά τμήματα AB, BC, CD, DE, EF τοῦ προβόλου.

Τμῆμα AB.

Ἡ καμπτική ροπή εἶναι μηδενική στό τμῆμα αὐτό, ἑπομένως $U_{AB} = 0$

Τμῆμα BC.

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό B εἶναι: $M_{BC}(x) = P \cdot x$.

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης εἶναι: $U_{BC} = \dfrac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \int_0^{\alpha} M^2_{BC}(x) \cdot dx$

Τμῆμα CD

Στό τμῆμα αὐτό ἔχουμε καμπτική ροπή σταθερή καί ἴση μέ $P \cdot \alpha$, $M_{CD} = P \cdot \alpha$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης εἶναι: $U_{CD} = \dfrac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \int_0^{2\alpha} M^2_{CD} \cdot dx$

Τμῆμα DE

Ἡ καμπτική ροπή σέ ἀπόσταση x ἀπό τό E εἶναι $M_{DE}(x) = P \cdot x$.

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης εἶναι: $U_{DE} = \dfrac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \int_0^{\alpha} M^2_{DE}(x) \cdot dx$.

Τμῆμα EF

Ἡ καμπτική ροπή εἶναι μηδενική στό τμῆμα αὐτό, ἑπομένως $U_{EF} = 0$.

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης ὅλου τοῦ προβόλου εἶναι:

$$U = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EF} \Rightarrow U = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \left[\int_0^{\alpha} M^2_{BC}(x) \cdot dx + \int_0^{2\alpha} M^2_{CD} \cdot dx + \int_0^{\alpha} M^2_{DE}(x) \cdot dx \right].$$

Ἔχουμε:

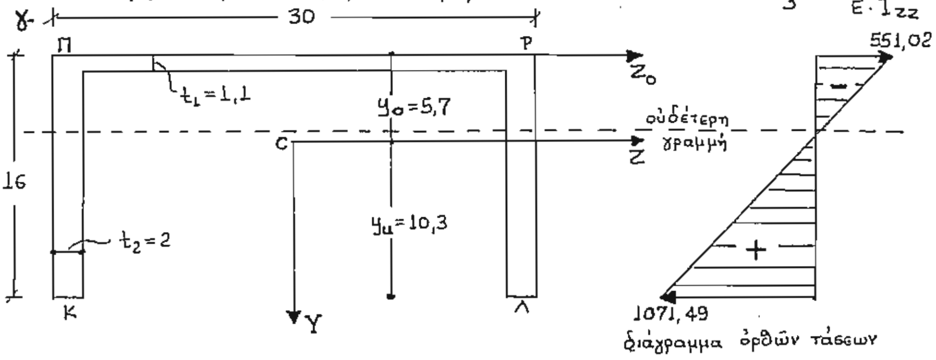
$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \left[\int_0^{\alpha} 2 \cdot M_{BC}(x) \cdot \frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial P} \cdot dx + \int_0^{2\alpha} 2 \cdot M_{CD} \cdot \frac{\partial M_{CD}}{\partial P} \cdot dx + \int_0^{\alpha} 2 \cdot M_{DE}(x) \cdot \frac{\partial M_{DE}(x)}{\partial P} \cdot dx \right].$$

$$\frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial P} = x, \quad \frac{\partial M_{CD}}{\partial P} = \alpha, \quad \frac{\partial M_{DE}(x)}{\partial P} = x, \quad \text{ὁπότε}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \cdot \left[\int_0^{\alpha} P \cdot x \cdot x \cdot dx + \int_0^{2\alpha} P \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot dx + \int_0^{\alpha} P \cdot x \cdot x \cdot dx \right] \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{8}{3} \cdot \frac{P \cdot \alpha^3}{E \cdot I_{zz}}$$

Ἡ ὁριζόντια, λοιπόν, μετακίνηση τοῦ F εἶναι: $\delta_F = \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{P \cdot \alpha^3}{E \cdot I_{zz}}$.

γ.



Θά βροῦμε πρῶτα τή θέση τοῦ κέντρου βάρους τῆς διατομῆς. Ἐπειδή ὁ ἄξονας Y εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς διατομῆς, τό κέντρο βάρους θά βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα Y. Ἡ στατική ροπή τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Z_0 εἶναι: $S_{z_0} = 2 \cdot 16 \cdot 8 + 1{,}1 \cdot 26 \cdot 0{,}55 + 2 \cdot 16 \cdot 8 = 527{,}73 \text{ cm}^2$. Τό ἐμβαδό A τῆς διατομῆς εἶναι: $A = 2 \cdot 16 + 1{,}1 \cdot 26 + 2 \cdot 16 = 92{,}6 \text{ cm}^2$. Ἡ συντεταγμένη, λοιπόν, y_u τοῦ κέντρου βάρους εἶναι $y_u = \dfrac{S_{z_0}}{A} = \dfrac{527{,}73 \text{ cm}^3}{92{,}6 \text{ cm}^2} \Rightarrow$ $y_u = 5{,}7$ cm. Εἶναι ἐπίσης $y_o = 16 - y_u \Rightarrow y_o = 10{,}3$ cm.

Γιά μιά διατομή, πού βρίσκεται ἀνάμεσα στά σημεῖα C καί D τοῦ προβόλου, ἔχουμε ὀρθή ἐφελκυστική τάση λόγω ἀξονικῆς δύναμης ἴση μέ $\dfrac{N}{A}$, ὅπου N ἡ ἀξονική δύναμη στό τμῆμα CD. Εἶναι λοιπόν:

$$\sigma^N_{xx} = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma^N_{xx} = \frac{P}{A} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3 \text{ kp}}{92{,}6 \text{ cm}^2} \Rightarrow \sigma^N_{xx} = +27 \text{ kp/cm}^2.$$

Στίς θέσεις K, Λ ἔχουμε ἀξονική ἐφελκυστική τάση λόγω κάμψης

$$\sigma^M_{xx,K} = \sigma^M_{xx,\Lambda} = \frac{M \cdot y_u}{I_{zz}},$$ ὅπου M ἡ καμπτική ροπή στό τμῆμα CD,

$M = P \cdot a$, καί I_{zz} ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς διατομῆς ὡς πρός τόν ἄξονα Z,

$$I_{zz} = \frac{30 \cdot 16^3}{12} + 30 \cdot 16 \cdot 2{,}3^2 - \left(\frac{26 \cdot 14{,}9^3}{12} + 26 \cdot 14{,}9 \cdot 2{,}85^2\right) = 2465{,}32 \text{ cm}^4.$$

Εἶναι ἑπομένως: $$\sigma^M_{xx,K} = \sigma^M_{xx,\Lambda} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ kp}\cdot\text{cm} \cdot 10{,}3 \text{ cm}}{2465{,}32 \text{ cm}^4} = +1044{,}49 \text{ kp/cm}^2$$

Ἡ συνολική ὀρθή τάση στίς θέσεις K, Λ εἶναι:

$$\sigma_{xx,K} = \sigma^N_{xx} + \sigma^M_{xx,K} \Rightarrow \sigma_{xx,K} = +1071{,}49 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{xx,\Lambda} = \sigma^N_{xx} + \sigma^M_{xx,\Lambda} \Rightarrow \sigma_{xx,\Lambda} = +1071{,}49 \text{ kp/cm}^2$$

Στίς θέσεις Π, P ἔχουμε ἀξονική θλιπτική τάση λόγω κάμψης:

$$\sigma^M_{xx,\Pi} = \sigma^M_{xx,P} = \frac{M \cdot y_o}{I_{zz}} \Rightarrow \sigma^M_{xx,\Pi} = \sigma^M_{xx,P} = -\frac{2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ kp}\cdot\text{cm} \cdot 5{,}7 \text{ cm}}{2465{,}32 \text{ cm}^4} =$$
$$= -578{,}02 \text{ kp/cm}^2.$$

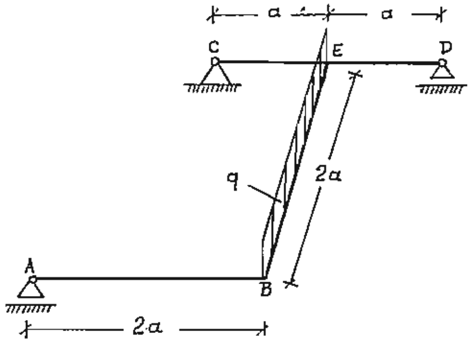
Ἡ συνολική ὀρθή τάση στίς θέσεις Π, P εἶναι:

$$\sigma_{xx,\Pi} = \sigma^N_{xx} + \sigma^M_{xx,\Pi} \Rightarrow \sigma_{xx,\Pi} = -551{,}02 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{xx,P} = \sigma^N_{xx} + \sigma^M_{xx,P} \Rightarrow \sigma_{xx,P} = -551{,}02 \text{ kp/cm}^2.$$

Μέ βάση τίς τιμές τῶν ὀρθῶν τάσεων στίς θέσεις K, Λ, P, Π κατασκευάζουμε τό διάγραμμα ὀρθῶν τάσεων. Ἡ οὐδέτερη γραμμή στήν περίπτωση αὐτή δέν συμπίπτει μέ τόν ἄξονα Z, διότι ἐκτός ἀπό τίς ὀρθές τάσεις λόγω κάμψης ἡ διατομή καταπονεῖται ἐπιπρόσθετα καί ἀπό ὀρθές ἐφελκυστικές τάσεις λόγω ἀξονικῆς δύναμης.

άσκηση 8



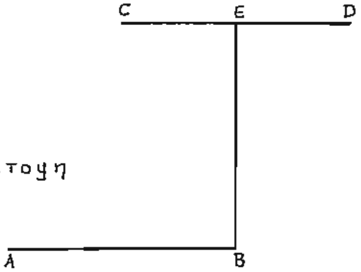
Στό φορέα τοῦ σχήματος οἱ δοκοί AB, CD εἶναι κάθετοι πρός τήν δοκό BE, ἡ ὁποία καταπονεῖται ἀπό κατακόρυφο ὁμοιόμορφο φορτίο q. Ὅλες οἱ δοκοί ἔχουν κυκλική διατομή ἀκτίνας r.

α. Νά κατασκευαστοῦν τά διαγράμματα τεμνουσῶν δυνάμεων, ροπῶν κάμψης καί ροπῶν στρέψης.

β. Νά ἐξεταστεῖ ἡ ἐντατική κατάσταση σέ σημεῖο Λ, πού βρίσκεται στό μέσο τῆς δοκοῦ BE καί στήν πάνω γενέτειρα τῆς διατομῆς. Νά βρεθοῦν οἱ κύριες τάσεις γιά τό σημεῖο αὐτό.

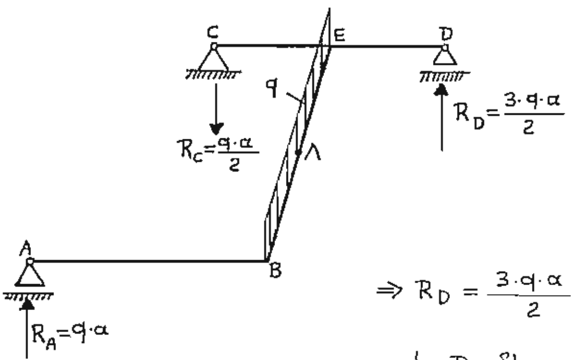
Δίνονται: $a = 1\,m$, $q = 200\ kp/m$, $r = 4\ cm$.

γ. Νά ἀναφερθεῖ σύντομα πῶς μπορεῖ νά βρεθεῖ ἡ κατακόρυφη μετατόπιση τοῦ σημείου B.



κάτοψη

λύση



Θά βροῦμε πρῶτα τίς ἀντιδράσεις στίς στηρίξεις. Ἡ ἐξίσωση ροπῶν ὡς πρός τή δοκό CD δίνει: $R_A \cdot 2a - 2\cdot q\cdot a\cdot a = 0 \Rightarrow$ $R_A = q\cdot a$.

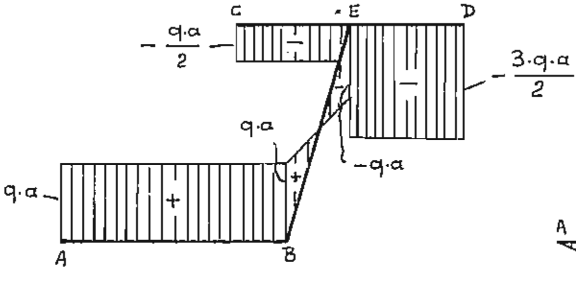
Ἡ ἐξίσωση ροπῶν ὡς πρός C δίνει:

$$R_A\cdot a + 2\cdot q\cdot a\cdot a - R_D\cdot 2a = 0 \Rightarrow$$

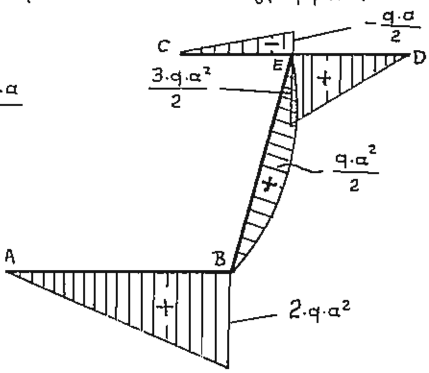
$\Rightarrow R_D = \dfrac{3\cdot q\cdot a}{2}$. Τέλος ἡ ἐξίσωση ροπῶν ὡς πρός D δίνει: $R_A\cdot 3a - R_C\cdot 2a - 2\cdot q\cdot a\cdot a = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow R_C = \dfrac{q\cdot a}{2}$.

Γιά τήν κατασκευή τοῦ διαγράμματος ροπῶν κάμψης βρίσκουμε τήν καμπτική ροπή σέ χαρακτηριστικές θέσεις τοῦ φορέα (πρβλ. άσκηση 5 σελίδα 154). Εἶναι: $M_A^{AB} = 0$, $M_B^{AB} = 2\cdot q\cdot a^2$, $M_B^{BE} = 0$, $M_\Lambda^{BE} = \dfrac{q\cdot a^2}{2}$, $M_E^{BE} = 0$, $M_C^{CD} = 0$, $M_E^{CE} = -\dfrac{q\cdot a^2}{2}$, $M_E^{ED} = \dfrac{3\cdot q\cdot a^2}{2}$, $M_D^{CD} = 0$.

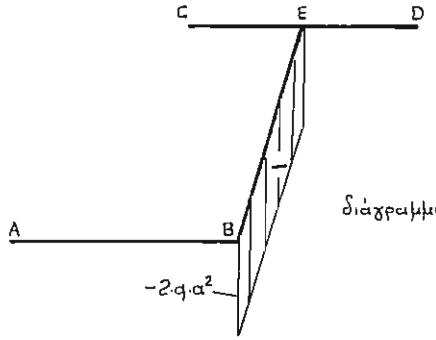
Μέ βάση τά στοιχεῖα αὐτά κατασκευάζουμε εὔκολα τά διαγράμματα.



διάγραμμα τεμνουσῶν δυνάμεων

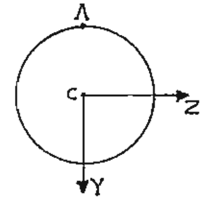


διάγραμμα ροπῶν κάμψης



διάγραμμα ροπῶν στρέψης

β.



Στό σημεῖο Λ θά ἀσκεῖται ὀρθή θλιπτική τάση $\sigma_{xx,\Lambda}$ λόγω κάμψης, καί διατμητική τάση $\tau_{xz,\Lambda}$ λόγω στρέψης.

Εἶναι : $\sigma_{xx,\Lambda} = \frac{M_\Lambda \cdot y_\Lambda}{I_{zz}}$, ὅπου M_Λ ἡ καμπτική ροπή στό σημεῖο Λ καί $M_\Lambda = \frac{q \cdot a^2}{2}$. Ἡ ροπή ἀδράνειας I_{zz} εἶναι $I_{zz} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$.

Ἡ ὀρθή τάση, λοιπόν, στό Λ εἶναι : $\sigma_{xx,\Lambda} = -\frac{\frac{q \cdot a^2}{2} \cdot r}{\frac{\pi \cdot r^4}{4}} = -\frac{2 \cdot q \cdot a^2}{\pi \cdot r^3} =$

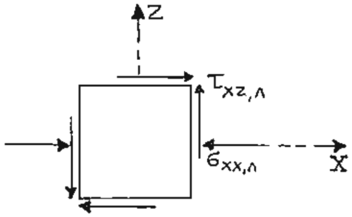
$= -\frac{2 \cdot \frac{200}{100} \frac{kp}{cm} \cdot (10^2 cm)^2}{\pi \cdot (4\,cm)^3} \Rightarrow \sigma_{xx,\Lambda} = -198,94\ kp/cm^2$.

Ἡ διατμητική τάση στό Λ εἶναι $\tau_{xz,\Lambda} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3}$ (πρβλ. τυπολόγιο σελίδα 99, πλήρης κυκλική διατομή). Εἶναι λοιπόν :

$$\tau_{xz,\Lambda} = \frac{16 \cdot 2 \cdot q \cdot a^2}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 2 \cdot \frac{200}{100} \frac{kp}{cm^2} \cdot (10^2 cm)^2}{\pi \cdot (8\,cm)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{xz,\Lambda} = 397,89\ kp/cm^2.$$

Ἡ φορά τῆς $\tau_{xz,\Lambda}$ θά προκύψει ἀπό τήν παρατήρηση ὅτι οἱ διατμητικές τάσεις, πού προκαλοῦνται πάνω στή διατομή λόγω στρέψης, πρέπει νά ἔχουν τέτοια φορά, ὥστε ἡ ροπή πού θά προκαλέσουν νά ἔχει τή φορά τῆς στρεπτικῆς ροπῆς Mt.



Ὥστε γιά τό σημεῖο Λ ἡ ἐντατική κατάσταση εἶναι: $\sigma_{xx,\Lambda} = -198,94$ Kp/cm²,

$\sigma_{zz,\Lambda} = 0$

$\tau_{xz,\Lambda} = 397,89$ Kp/cm².

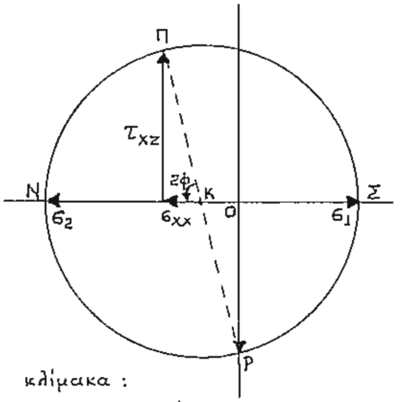
Οἱ κύριες τάσεις εἶναι:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-198,94}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-198,94}{2}\right)^2 + 397,89^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{1,2} = -99,47 \pm 410,14 \Rightarrow$$

$$\sigma_1 = 310,67 \text{ Kp/cm}^2 , \quad \sigma_2 = -509,61 \text{ Kp/cm}^2 .$$



κλίμακα:
1cm → 200 Kp/cm²

Τό κύριο σύστημα ἀντιστοιχεῖ σέ γωνία στροφῆς φ, πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

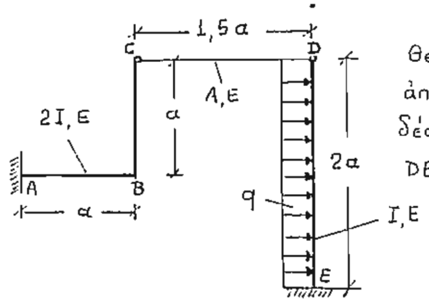
$$\tan 2\phi = \frac{2\cdot\tau_{xz}}{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}} \Rightarrow \tan 2\phi = \frac{2\cdot 397,89}{-198,94} = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = -37^\circ, 98 .$$

Στή γραφική λύση κατασκευάζουμε τόν κύκλο Mohr μέ $\sigma_{xx} = -198,94$, $\sigma_{zz} = 0$, $\tau_{xz} = 397,89$. Στρέφοντας ἀριστερόστροφα κατά γωνία 2φ τήν ἀκτίνα ΚΠ [πού ἀντιστοιχεῖ στήν κατ' ἀπόλυτη τιμή μεγαλύτερη ἀπό τίς ὀρθές τάσεις τοῦ συστήματος (X, Z)] παίρνουμε τήν ἀκτίνα ΚΝ [πού ἀντιστοιχεῖ στήν κατ' ἀπόλυτη τιμή μεγαλύτερη ἀπό τίς κύριες τάσεις]. Ἔτσι βρίσκουμε: $\sigma_1 \simeq 310$ Kp/cm², $\sigma_2 \simeq -510$ Kp/cm².

γ. Θεωροῦμε ὅτι στό B ἐφαρμόζει μιά κατακόρυφη ὑποθετική δύναμη H. Ὑπολογίζουμε τίς ἀντιδράσεις, πού προκαλοῦν στίς στηρίξεις οἱ φορτίσεις q καί H. Βρίσκουμε τήν ἐνέργεια παραμόρφωσης U ὅλου τοῦ φορέα, πού προκαλεῖται ἀπό τίς φορτίσεις q καί H, παίρνοντας ὑπ' ὄψη τά ἀποτελέσματα τῆς κάμψης καί τῆς στρέψης. Ἡ μερική παράγωγος τῆς U ὡς πρός H, ὅπου στήν τελική ἔκφραση τῆς $\frac{\partial U}{\partial H}$ θέτουμε H = 0, (ἐπειδή ἡ δύναμη H δέν ὑπάρχει στήν πραγματικότητα), θά μᾶς δώσει τήν κατακόρυφη μετατόπιση δ_B τοῦ σημείου B, $\delta_B = \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_{H=0}$.

ασκηση 9



Θεωροῦμε τό φορέα τοῦ σχήματος, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό τίς δοκούς ABC, DE, πού συνδέονται μεταξύ τους μέ τή ράβδο CD. Οἱ δοκοί DE, ABC ἔχουν ροπή ἀδράνειας διατομῆς I καί 2I ἀντίστοιχα.

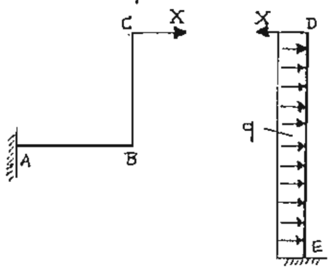
α. Νά βρεθεῖ ἡ τάση τῆς ράβδου CD,

β. Νά γίνει σκαρίφημα τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τῆς δοκοῦ DE καί νά προσδιοριστεῖ ἡ θέση τοῦ σημείου καμπῆς της.

γ. Νά βρεθεῖ ἡ ὁριζόντια μετατόπιση τοῦ σημείου D.

Δίνονται: $\alpha = 4\ m$, $q = 500\ Kp/m$, $I = 50.000\ cm^4$, $A = 1\ cm^2$, $E = 2,1 \cdot 10^6\ Kp/cm^2$.

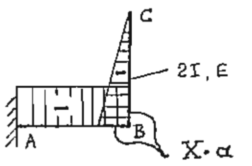
λυση



α. Θεωροῦμε ὡς ὑπερστατικό μέγεθος τήν τάση τῆς ράβδου CD. Ἄς εἶναι X ἡ τάση τῆς ράβδου αὐτῆς. Ἄς εἶναι ἐπίσης: δ_C ἡ μετακίνηση τοῦ σημείου C τῆς δοκοῦ ABC, πού προκαλεῖται ἀπό τήν τάση X · δ_D ἡ μετακίνηση τοῦ σημείου D τῆς δοκοῦ DE, πού προκαλεῖται ἀπό τίς φορτίσεις q καί X · $\Delta \ell$ ἡ μεταβολή μήκους τῆς ράβδου CD λόγω τῆς τάσης X. Ἡ συνθήκη συμβιβαστοῦ, πού πρέπει νά ἱκανοποιεῖται, εἶναι:

$\delta_D = \delta_C + \Delta \ell$ (1).

Ἡ μετακίνηση δ_C εἶναι: $\delta_C = \dfrac{\partial U_{ABC}}{\partial X}$, ὅπου U_{ABC} ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης τῆς δοκοῦ ABC, πού προκαλεῖται ἀπό τήν τάση X, καί $U_{ABC} = U_{AB} + U_{BC}$.



Οἱ καμπτικές ροπές, πού προκαλεῖ στή δοκό ABC ἡ τάση X

Στό τμῆμα AB ἡ καμπτική ροπή εἶναι σταθερή καί ἴση μέ $-X \cdot \alpha$, $M_{AB} = -X\alpha$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι:

$$U_{AB} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \int_0^{\alpha} M^2_{AB} \cdot dx .$$

Στό τμῆμα BC καί σέ ἀπόσταση x ἀπό τό C ἡ καμπτική ροπή εἶναι $M_{BC}(x) = -X \cdot x$. Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης γιά τό τμῆμα αὐτό εἶναι:

$$U_{BC} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_{zz}} \cdot \int_0^{\alpha} M^2_{BC}(x) \cdot dx .$$

Ἡ ἐνέργεια παραμόρφωσης ὅλης τῆς δοκοῦ ABC εἶναι:

$$U_{ABC} = U_{AB} + U_{BC} \Rightarrow U_{ABC} = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^a M^2_{AB}\cdot dx + \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^a M^2_{BC}(x)\cdot dx$$

Ἡ μετακίνηση δ_C εἶναι: $\delta_C = \frac{\partial U_{ABC}}{\partial X} \Rightarrow \delta_C = \frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^a 2\cdot M_{AB}\cdot\frac{\partial M_{AB}}{\partial X}\cdot dx +$

$$+\frac{1}{2\cdot E\cdot I_{zz}}\cdot\int_0^a 2\cdot M_{BC}(x)\cdot\frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial X}\cdot dx\ .$$

Ἔχουμε: $\frac{\partial M_{AB}}{\partial X} = -a$, $\frac{\partial M_{BC}(x)}{\partial X} = -x$, $I_{zz} = 2\cdot I$, ὁπότε

$$\delta_C = \frac{1}{2\cdot E\cdot I}\cdot\int_0^a(-X\cdot a)(-a)dx + \frac{1}{2\cdot E\cdot I}\int_0^a(-X\cdot x)(-x)dx \Rightarrow \delta_C = \frac{X\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I} + \frac{X\cdot a^3}{6\cdot E\cdot I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_C = \frac{2\cdot X\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} \quad (2)\ .$$

Ἄς εἶναι δ_D^q ἡ μετακίνηση τοῦ σημείου D τῆς δοκοῦ DE λόγω τῆς φόρτισης q καί δ_D^X ἡ μετακίνηση τοῦ D, πού προκαλεῖται ἀπό τήν τάση X. Ἡ συνολική μετακίνηση δ_D θά εἶναι: $\delta_D = \delta_D^q - \delta_D^X$.
Ἀπό πίνακες βρίσκουμε τή βύθιση στό ἄκρο πακτωμένης δοκοῦ, πού δέχεται ὁμοιόμορφο φορτίο q. Εἶναι λοιπόν:

$$\delta_D^q = \frac{q\cdot \ell^4_{DE}}{8\cdot E\cdot I_{zz}} = \frac{q\cdot(2a)^4}{8\cdot E\cdot I} \Rightarrow \delta_D^q = \frac{2\cdot q\cdot a^4}{E\cdot I}\ ,$$

διότι ἡ δοκός DE ἔχει ροπή ἀδράνειας διατομῆς $I_{zz} = I$.
Ἀπό πίνακες ἐπίσης βρίσκουμε τή βύθιση στό ἄκρο πακτωμένης δοκοῦ, ἡ ὁποία καταπονεῖται μέ συγκεντρωμένο φορτίο X στό ἄκρο αὐτό. Εἶναι λοιπόν:

$$\delta_D^X = \frac{X\cdot \ell^3_{DE}}{3\cdot E\cdot I_{zz}} = \frac{X\cdot(2a)^3}{3\cdot E\cdot I} \Rightarrow \delta_D^X = \frac{8}{3}\cdot\frac{X\cdot a^3}{E\cdot I}\ .$$

Ἡ συνολική μετακίνηση τοῦ D εἶναι:

$$\delta_D = \delta_D^q - \delta_D^X \Rightarrow \delta_D = \frac{2\cdot q\cdot a^4}{E\cdot I} - \frac{8}{3}\cdot\frac{X\cdot a^3}{E\cdot I} \quad (3)\ .$$

Ἡ μεταβολή μήκους τῆς ράβδου CD λόγω τῆς τάσης X εἶναι:

$$\Delta\ell = \frac{X\cdot \ell_{CD}}{A\cdot E} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{X\cdot 1{,}5\cdot a}{A\cdot E} \quad (4)\ ,$$ ὅπου A

τό ἐμβαδό τῆς διατομῆς τῆς ράβδου CD.

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2), (3) καί (4) παίρνουμε:

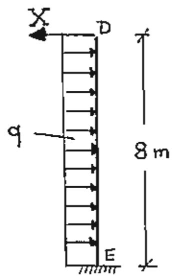
$$\frac{2\cdot q\cdot a^4}{E\cdot I} - \frac{8\cdot X\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} = \frac{2\cdot X\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1{,}5\cdot X\cdot a}{A\cdot E} \Rightarrow \frac{10\cdot X\cdot a^3}{3\cdot I} + \frac{1{,}5\cdot X\cdot a}{A} = \frac{2\cdot q\cdot a^4}{I} \Rightarrow$$

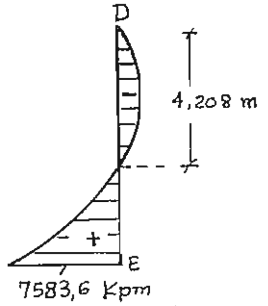
$$\Rightarrow \frac{X\cdot(10\cdot a^3\cdot A + 4{,}5\cdot a\cdot I)}{3\cdot A\cdot I} = \frac{2\cdot q\cdot a^4}{I} \Rightarrow X = \frac{6\cdot q\cdot a^3\cdot A}{10\cdot a^2\cdot A + 4{,}5\cdot I} =$$

$$= \frac{6\cdot\frac{500}{100}\frac{kp}{cm}\cdot(4\cdot 10^2 cm)^3\cdot 1\,cm^2}{10\cdot(4\cdot 10^2 cm)^2\cdot 1\,cm^2 + 4{,}5\cdot 5\cdot 10^4\cdot cm^4} \Rightarrow X = 1052{,}05\ kp\ .$$

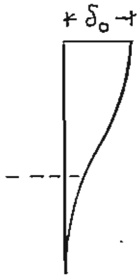
β. Ἡ ἐλαστική γραμμή θά παρουσιάζει σημεῖο καμπῆς στή θέση ἐκείνη στήν ὁποία μηδενίζεται ἡ καμπτική ροπή.

Ἄς εἶναι x ἡ ἀπόσταση ἀπό τό D στήν ὁποία μηδενίζεται ἡ καμπτική ροπή. Ἡ x θά βρεθεῖ ἀπό τή σχέση: $X\cdot x - \frac{q\cdot x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = 4{,}208$ m. Στή θέση x ἡ ἐλαστική γραμμή τῆς δοκοῦ θά παρουσιάζει σημεῖο καμπῆς. Μποροῦμε, λοιπόν, εὔκολα νά δώσουμε σέ σκαρίφημα τή μορφή τῆς ἐλαστικῆς γραμμῆς τῆς δοκοῦ DE.





διάγραμμα ροπῶν κάμψης.



σκαρίφημα ἐλαστικῆς γραμμῆς.

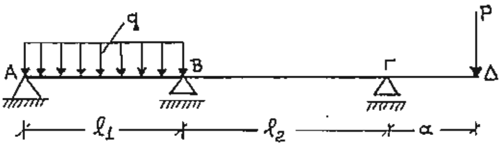
γ. Ἡ ὁριζόντια μετακίνηση τοῦ σημείου D εἶναι:

$$\delta_D = \delta_D^q - \delta_D^X \Rightarrow \delta_D = \frac{2\cdot q\cdot a^4}{E\cdot I} - \frac{8\cdot X\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_D = \frac{2\cdot\frac{500}{100}\,\frac{Kp}{cm}\cdot(4\cdot 10^2 cm)^4}{2{,}1\cdot 10^6\,\frac{Kp}{cm^2}\cdot 5\cdot 10^4\,cm^4} - \frac{8\cdot 1052{,}05\,Kp\cdot(4\cdot 10^2 cm)^3}{3\cdot 2{,}1\cdot 10^6\,\frac{Kp}{cm^2}\cdot 5\cdot 10^4\,cm^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_D = 0{,}73\ cm.$$

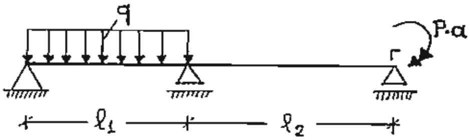
ἄσκηση 10



Θεωροῦμε τή συνεχή δοκό τοῦ διπλανοῦ σχήματος, ἡ ὁποία δέχεται τίς φορτίσεις q καί P. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ μήκους α, ὥστε ἡ ροπή M_B στή στήριξη B νά εἶναι μηδενική.

λύση

Ἡ ἐπίδραση τοῦ φορτίου P στό τμῆμα ΑΒΓ τῆς δοκοῦ ἰσοδυναμεῖ μέ ροπή P·α, πού ἐφαρμόζει στό σημεῖο Γ. Ἡ ἐπίλυση τῆς συνεχοῦς δοκοῦ θά γίνει μέ τή βοήθεια τῆς ἐξίσωσης Clapeyron:



$$M_\alpha\cdot\ell_\alpha + 2\cdot M_\beta\cdot(\ell_\alpha+\ell_\beta) + M_\gamma\cdot\ell_\beta = -\frac{6\cdot A_\alpha\cdot\bar{X}_\alpha}{\ell_\alpha} - \frac{6\cdot A_\beta\cdot\bar{X}_\beta}{\ell_\beta} \quad (1)$$

Στό πρόβλημά μας εἶναι: $M_\alpha = 0$, $\ell_\alpha = \ell_1$, $M_\gamma = 0$, $\ell_\beta = \ell_2$. Ἀπό πίνακες βρίσκουμε τίς ποσότητες τοῦ δεύτερου μέλους τῆς ἐξίσωσης (1) γιά τό πρόβλημά μας. Εἶναι: $\dfrac{6\cdot A_\alpha\cdot \bar{x}_\alpha}{\ell_\alpha} = \dfrac{q\cdot \ell_1^3}{4}$, $\dfrac{6\cdot A_\beta\cdot \bar{x}_\beta}{\ell_\beta} = \dfrac{(-P\cdot\alpha)\cdot(3\ell_2^2-\ell_2^2)}{\ell_2}$, ὅπου στήν ἀντικατάσταση ἡ ροπή $P\cdot\alpha$ τέθηκε προσημασμένη (ἀρνητική, διότι εἶναι θλιπτική).

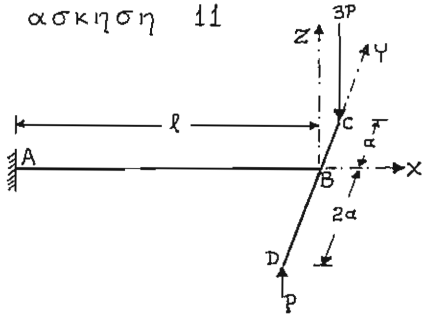
Ἀντικαθιστώντας τίς τιμές αὐτές στήν (1) ἔχουμε:

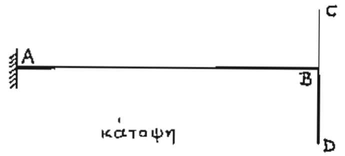
$$2\cdot M_\beta\cdot(\ell_1+\ell_2) = -\frac{q\cdot\ell_1^3}{4} + 2\cdot P\cdot\alpha\cdot\ell_2$$

Ἐπειδή ἀναζητοῦμε τιμή τοῦ α τέτοια, ὥστε νά εἶναι $M_\beta = 0$, θά πρέπει:

$$-\frac{q\cdot\ell_1^3}{4} + 2\cdot P\cdot\alpha\cdot\ell_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{q\cdot\ell_1^3}{8\cdot P\cdot\ell_2}.$$

ασκηση 11





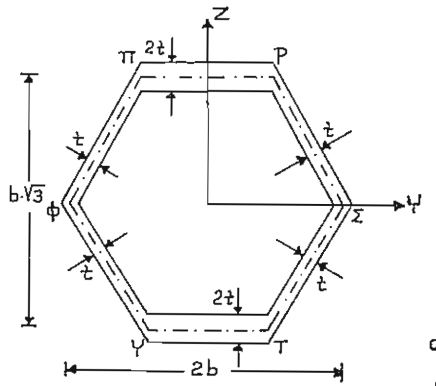
κάτοψη

Θεωροῦμε τό φορέα τοῦ σχήματος, στόν ὁποῖο ἡ δοκός AB εἶναι κάθετη πρός τήν CD. Ὁ φορέας πακτώνεται στό σημεῖο A καί δέχεται στά σημεῖα C καί D τά κατακόρυφα φορτία 3P καί P ἀντίστοιχα. Ἡ διατομή τῶν δοκῶν τοῦ φορέα φαίνεται στό διπλανό σχῆμα.

α. Νά κατασκευαστοῦν τά διαγράμματα ροπῶν κάμψης καί ροπῶν στρέψης.

β. Νά βρεθοῦν οἱ μέγιστες ὀρθές τάσεις λόγω κάμψης καί οἱ μέγιστες διατμητικές τάσεις λόγω στρέψης, πού ἀναπτύσσονται στή διατομή τῆς πάκτωσης A.

γ. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία στροφῆς τῆς διατομῆς στή θέση B τῆς δοκοῦ AB.



διατομή τοῦ φορέα

Νά θεωρηθοῦν γνωστά τά μήκη ℓ, α, b, t. Νά ληφθεῖ ἐπίσης $I_{yy} = 4\cdot b^3\cdot t$.

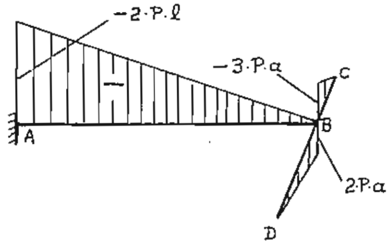
λυση

α. Μέ βάση τίς παρατηρήσεις, πού κάναμε στήν ἄσκηση 6, βρίσκουμε τήν τιμή τῆς ροπῆς κάμψης καί στρέψης σέ χαρακτηριστικές θέσεις τοῦ φορέα. Εἶναι:

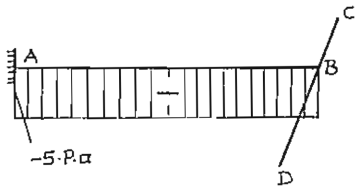
$M_D^{DC} = 0$, $M_B^{DB} = 2Pa$, $M_C^{DC} = 0$, $M_B^{CB} = -3Pa$, $M_B^{BA} = 0$, $M_A^{AB} = -2P\ell$

$$M_{t_D}^{DC} = M_{t_C}^{DC} = M_{t_B}^{DC} = 0 \quad , \quad M_{t_B}^{AB} = M_{t_A}^{AB} = -3Pa - 2Pa = -5Pa .$$

Μέ βάση τίς παραπάνω τιμές κατασκευάζουμε τά διαγράμματα ροπῶν στρέψης καί κάμψης:



διάγραμμα ροπῶν κάμψης.



διάγραμμα ροπῶν στρέψης.

β. Βρήκαμε στό προηγούμενο ἐρώτημα ὅτι ἡ ροπή κάμψης στή θέση A τῆς πάκτωσης εἶναι $M_A = -2.P.\ell$. Οἱ ὀρθές τάσεις, πού ἀναπτύσσονται στή θέση αὐτή λόγω κάμψης, δίνονται ἀπό τή σχέση $\sigma_{xx} = \dfrac{M_A}{I_{yy}} \cdot z$ (1).

Τή μέγιστη ὀρθή τάση τήν παίρνουμε γιά $z = z\,max.$, δηλαδή γιά $z = \pm\left(\dfrac{b\sqrt{3}}{2} + t\right)$
Μέ ἀντικατάσταση στήν (1) καί χωρίς νά πάρουμε ὑπ' ὄψη τά πρόσημα τῶν ὅρων, πού ὑπεισέρχονται σ' αὐτήν, βρίσκουμε ὅτι ἡ μέγιστη ὀρθή τάση στή θέση A τῆς πάκτωσης εἶναι:

$$\sigma_{xx,\,max.} = \frac{2P\ell}{4b^3 t}\cdot\left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + t\right) = \frac{P\ell}{2b^3 t}\cdot\left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + t\right) .$$

Ἡ τάση αὐτή εἶναι ἐφελκυστική γιά ἕνα σημεῖο, πού βρίσκεται στήν πάνω ἴνα τῆς δοκοῦ, καί θλιπτική γιά ἕνα σημεῖο, πού βρίσκεται στήν κάτω ἴνα. Αὐτό προκύπτει ἀπό τήν θεώρηση τῆς μορφῆς, πού θά ἔχει ὁ φορέας μετά τήν κάμψη. Γιά θλιπτική καμπτική ροπή οἱ πάνω ἴνες τῆς δοκοῦ ἐφελκύονται, ἐνῶ οἱ κάτω ἴνες θλίβονται.

Τή μέγιστη διατμητική τάση στή θέση A τῆς πάκτωσης θά τή βροῦμε μέ βάση τά συμπεράσματα τῆς θεωρίας τοῦ ἀναλόγου μεμβράνης μέ ἐσωτερικές ὀπές. Ἡ διατμητική τάση σ' ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς διατομῆς δίνεται ἀπό τή σχέση $\tau = \dfrac{c}{\delta}$, ὅπου δ εἶναι τό πάχος τῆς διατομῆς γιά τό τυχαῖο αὐτό σημεῖο καί

c εἶναι ἡ τιμή τῆς τασικῆς συνάρτησης, πού λύνει τό πρόβλημα, κατά μῆκος τοῦ περιγράμματος τῆς διατομῆς. Ἡ c ἐκφράζεται συναρτήσει τῆς γνωστῆς ροπῆς στρέψης M_t τοῦ προβλήματος ἀπό τή σχέση $M_t = 2 \cdot c \cdot A$, ὅπου A εἶναι τό ἐμβαδό τῆς ὀπῆς, πού παρουσιάζει ἡ διατομή,

$$A = b \cdot b\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b\sqrt{3} \cdot \frac{b}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot b^2}{2}$$

Ἔχουμε λοιπόν: $c = \dfrac{M_t}{2 \cdot A} = \dfrac{-5P\alpha}{3\sqrt{3}\, b^2}$. Μέγιστη διατμητική τάση ἔχουμε στά σημεῖα ἐκεῖνα τῆς διατομῆς, γιά τά ὁποῖα εἶναι $\delta = \delta_{min.} = t$, ὁπότε $\tau_{max.} = \dfrac{-5P\alpha}{3\sqrt{3}\, b^2 t}$.

γ. Ἄς εἶναι θ ἡ ἀνά μονάδα μήκους γωνία στροφῆς καί G τό μέτρο στρέψης. Γνωρίζουμε ἀπό τή θεωρία τοῦ ἀνάλογου μεμβράνης μέ ἐσωτερικές ὀπές ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση $\int_\Gamma \tau \cdot ds = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A$, ὅπου τό ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα παίρνεται κατά μῆκος τοῦ περιγράμματος Γ τῆς διατομῆς. Ἡ προηγούμενη σχέση γράφεται: $\int_\Gamma \frac{c}{\delta} \cdot ds = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A$. Γιά κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα τῆς διατομῆς τό πάχος δ εἶναι σταθερό, ἐνῶ τό $\int_\Gamma ds$ ἀποτελεῖ τό μῆκος αὐτοῦ τοῦ τμήματος. Ἔχουμε, λοιπόν:

$$c \cdot \left[\frac{(\Pi P)}{2t} + \frac{(P\Sigma)}{t} + \frac{(\Sigma T)}{t} + \frac{(T\Upsilon)}{2t} + \frac{(\Upsilon\Phi)}{t} + \frac{(\Phi\Pi)}{t} \right] = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \cdot \left[\frac{b}{2t} + \frac{b}{t} + \frac{b}{t} + \frac{b}{2t} + \frac{b}{t} + \frac{b}{t} \right] = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \cdot \frac{5b}{t} = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot A \Rightarrow \theta = \frac{c \cdot 5b}{t \cdot 2G \cdot A} = \frac{-5P\alpha}{3\sqrt{3}\, b^2} \cdot \frac{5b}{t \cdot 2 \cdot G \cdot \frac{3\sqrt{3}\, b^2}{2}} = -\frac{25}{27} \cdot \frac{P \cdot \alpha}{b^3 \cdot t \cdot G}$$

Ἡ γωνία στροφῆς θ_B τῆς διατομῆς στή θέση B τῆς δοκοῦ AB θά εἶναι:

$$\theta_B = \int_0^\ell \theta \cdot dx = \theta \cdot \int_0^\ell dx = \theta \cdot \ell = -\frac{25}{27} \cdot \frac{P \cdot \alpha \cdot \ell}{b^3 \cdot t \cdot G}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γ. Μ. Λιάνης : Μηχανική παραμορφωσίμων σωμάτων καί 'Αντοχή 'Υλικῶν. Θεσσαλονίκη 1979

2. Αἰμ. Κανελλόπουλος : 'Αντοχή 'Υλικῶν. Θεσσαλονίκη 1973.

3. Γ. Νιτσιώτας : Μαθήματα Στατικῆς. Τόμος Ι. 'Αντοχή τῶν 'Υλικῶν.

4. Π. Σ. Θεοχάρης : Πειραματική 'Αντοχή τῶν 'Υλικῶν. 'Αθῆναι 1970.

5. Θ. Σ. Ξανθόπουλος : Στοιχεῖα Τανυστικοῦ Λογισμοῦ. Θεσσαλονίκη 1973.

6. Σ. Ι. Φυτάνογλου : 'Ασκήσεις 'Αντοχῆς 'Υλικῶν. 'Αθῆναι 1969.

7. St. Timoshenko : Strength of Materials, Part I – Part II. Van Nostrand Reinhold Co.

8. A. Green – W. Zerna : Theoretical Elasticity. Oxf. U.P.

9. J. E. Shigley : Mechanical Engineering Design – Second Edition. Mc. Graw – Hill Series in Mechanical Engineering.

10. B. Venkatramann – S. Patel : Structural Mechanics with introductions to Elasticity and Plasticity. Mc. Graw - Hill Editions.

11. M. Albigés – A. Coin : Résistance des Matériaux Appliquée. Tome I-II. Collection de l' Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics.

12. E. Callandreau : Problèmes de Résistance des Matériaux. Éditions Albin Michel.

13. István Szabó : Einführung in die Technische Mechanik. Springer-Verlag.

14. István Szabó : Höhere Technische Mechanik. Springer-Verlag.

15. István Szabó : Repertorium und Übungsbuch der Technischen Mechanik. Springer-Verlag.

16. An aid to solving Problems in Strength of Materials. Mir Publishers – Moscow. Translated from the Russian by Yuri Ermolyen. Μετάφραση στά ἀγγλικά τῆς ρωσσικῆς ἔκδοσης τοῦ 1969.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι γενικές ασκήσεις που ακολουθούν δόθηκαν κατά το παρελθόν ως θέματα εξετάσεων εξαμήνων ή προόδου στις διάφορες Πολυτεχνικές Σχολές της χώρας και στο Ε.Μ.Πολυτεχνείο. Αντίστοιχες ασκήσεις με πλήρη λύση έχουν παρουσιασθεί στα διάφορα κεφάλαια. Γι' αυτό εδώ οι ασκήσεις αυτές λύνονται συνοπτικά με παραπομπές στη θεωρία και στα προηγούμενα κεφάλαια, ώστε ν' αποτελέσουν χρήσιμο υλικό για μια τελική επανάληψη πριν τις εξετάσεις. Καλή τύχη !

ΑΣΚΗΣΗ 1

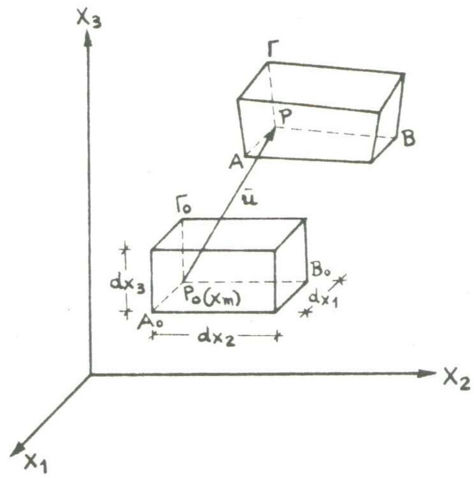
Θεωρούμε ένα στοιχειώδες υλικό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο γύρω από το υλικό σημείο $P_o(x_m)$ ενός σώματος στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Οι ακμές $\overline{P_oA_o}$, $\overline{P_oB_o}$, $\overline{P_o\Gamma_o}$ είναι παράλληλες προς τους άξονες X_1 , X_2 , X_3 αντίστοιχα και έχουν μήκη dx_1 , dx_2 , dx_3. Ας είναι dV_o ο όγκος του παραλληλεπιπέδου στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Στην παραμορφωμένη κατάσταση το πιο πάνω παραλληλεπίπεδο γίνεται πλαγιογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{P\Gamma}$ και η κορυφή P_o μετατοπίζεται στο σημείο P κατά $\bar{u}(x_1,x_2,x_3)$. Αν dV είναι ο όγκος του παραμορφωμένου παραλληλεπιπέδου και $\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}$ ο τανυστής παραμόρφωσης* να αποδειχθεί, θεωρώντας ότι οι παραμορφώσεις είναι πεπερασμένες, η σχέση :

$$\frac{dV}{dV_o} = \left|\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| = \sqrt{|(I+2\varepsilon)|} = \sqrt{|(\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij})|}$$

---

*Αντί για τον κλασσικό και καθιερωμένο σε πανελλήνια κλίμακα όρο τανυστής παραμόρφωσης χρησιμοποιείται από ορισμένους συγγραφείς ο όρος τανυστής τροπής. Πρόκειται για νεολογισμό που δεν έγινε αποδεκτός από τους περισσότερους συγγραφείς.

ΛΥΣΗ



Υπενθυμίζουμε ορισμένες γνωστές ιδιότητες από τη Γραμμική Άλγεβρα.

• Αν $\bar{a} = ||a_i||$, $\bar{b} = ||b_i||$, $\bar{c} = ||c_i||$ είναι τρία διανύσματα, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται με συντρέχουσες ακμές τα τρία αυτά διανύσματα δίνεται από τη σχέση :

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

• Η ορίζουσα γινομένου τετραγωνικών μητρών ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των μητρών αυτών.

Σχηματίζουμε το πρώτο μέλος της προς απόδειξη σχέσης :

$$dV_o = dx_1 dx_2 dx_3$$

Τα διανύσματα $\overline{PA} = \bar{\alpha}^{(1)}$, $\overline{PB} = \bar{\alpha}^{(2)}$, $\overline{P\Gamma} = \bar{\alpha}^{(3)}$ θα έχουν συντεταγμένες (βλ. και σελ.5):

$$\alpha_i^{(1)} = dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 = \left(\delta_{1i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dx_1$$

$$\alpha_i^{(2)} = dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 = \left(\delta_{2i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) dx_2$$

$$\alpha_i^{(3)} = dx_3 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = \left(\delta_{3i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right) dx_3$$

Ο όγκος του πλαγιογώνιου παραλληλεπιπέδου θα είναι

$$dV = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 & \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 & \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| dx_1 dx_2 dx_3$$

και

$$\frac{dV}{dV_o} = \left| \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \qquad (1)$$

Για ν' αποδείξουμε και το άλλο μέλος της προς απόδειξη σχέσης, θεωρούμε το ανάστροφο μητρώο του δεύτερου μέλους της (1) (που θα είναι και αυτό ένα μητρώο διαστάσεων 3Χ3). Ονομάζουμε g_{ij} το δεύτερο μέλος της (1). Τότε το γινόμενο g_{ij} επί το ανάστροφό του μητρώο $g^{*}_{ij} = h_{mj}$ θα δώσει:

$$g_{ij}\, g^{*}_{ij} = g_{ij}\, h_{mj} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) =$$

$$= \delta_{ij}\delta_{mj} + \delta_{ij}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{mj} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ \frac{\partial u_m}{\partial x_j} =$$

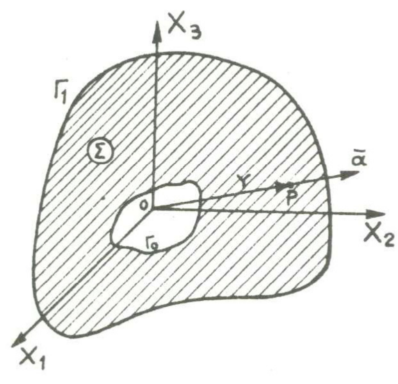
$$= \delta_{im} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_m} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$$

Είναι όμως $|g_{ij}\ g^{\star}_{ij}| = |g_{ij}|\ |g^{\star}_{ij}|$ και δεδομένου ότι $|g_{ij}| = |g^{\star}_{ij}|$ θα έχουμε τελικά :

$$|\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2 = |\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}| \Rightarrow |\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}| =$$

$$= \sqrt{|(\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij})|}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2



Θεωρούμε το σώμα Σ του σχήματος που περικλείεται ανάμεσα στην εσωτερική επιφάνεια Γ_0 και την εξωτ.Γ_1. Η αρχή Ο των αξόνων περικλείεται στο εσωτερικό της Γ_0 . Το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία υπό την επίδραση μόνο επιφανειακών δυνάμεων που εφαρμόζονται στις Γ_0 και Γ_1 ενώ οι μαζικές δυνάμεις είναι μηδενικές. Έστω ότι οι συνιστώσες της τάσης σ_{ij} στο τυχαίο σημείο $P(x_1,x_2,x_3)$ του Σ είναι της μορφής :

$\sigma_{ij} = T\alpha_i\alpha_j$ όπου $T(x_1,x_2,x_3)$ είναι συνάρτηση των συντεταγμένων του P και $\alpha_i(x_1,x_2,x_3)$, $i = 1,2,3$ είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\bar{\alpha}$ που έχει την ίδια κατεύθυνση με την $\overline{OP}$.

α. Να αποδειχθεί η σχέση $x_j \dfrac{\partial T}{\partial x_j} + 2\,T = 0$

β. Στην περίπτωση που η Γ_o είναι επιφάνεια σφαιρική με ακτίνα r_o που φορτίζεται με εσωτερική πίεση p και η T είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης του σημείου P από την αρχή O, να υπολογιστεί η T.

ΛΥΣΗ

α. Η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0$$

και καθώς στην περίπτωσή μας οι μαζικές δυνάμεις είναι μηδενικές γίνεται :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία τη δοσμένη έκφραση της σ_{ij} παίρνουμε :

$$\alpha_i \alpha_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + \alpha_j\, T\, \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \alpha_i\, T\, \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (1)$$

Έχουμε όμως :

$$\alpha_i = \frac{x_i}{r} \quad , \qquad r = \sqrt{x_i\, x_i} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \qquad (\text{Βλ. σ.5,119}) \quad ,$$

οπότε :

$$\alpha_i \alpha_j = \frac{x_i\, x_j}{r^2} \quad , \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\frac{x_i}{r})}{\partial x_j} = \frac{1}{r} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + x_i \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial x_j} = \frac{1}{r} \delta ij + x_i (- \frac{1}{r^2}) \frac{\partial r}{\partial x_j} \qquad (4)$$

Από την (2) έχουμε :

$$r^2 = x_j \ x_j \Rightarrow \frac{\partial (r^2)}{\partial x_j} = 2x_j \Rightarrow 2r \frac{\partial r}{\partial x_j} = 2x_j \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$$

και αντικαθιστώντας στην (4) παίρνουμε :

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i \ x_j}{r^3} \quad ,$$

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (\frac{x_j}{r})}{\partial x_j} = \frac{1}{r} \frac{\partial x_j}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial x_j} = \frac{\delta_{jj}}{r} - \frac{1}{r^2} x_j \frac{x_j}{r} = \frac{3}{r} - \frac{x_j \ x_j}{r^3} =$$

$$= \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \ .$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (1) θα έχουμε :

$$\frac{x_i \ x_j}{r^2} \ \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{x_j}{r} \cdot \left(T \ \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i \ x_j}{r^3}\right) + \frac{x_i}{r} \ . \ T \ . \ \frac{2}{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_i \ x_j}{r^2} \ \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{T\delta_{ij} x_j}{r^2} - \frac{T \ x_i \ x_j \ x_j}{r^4} + \frac{2Tx_i}{r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_i \ x_j}{r^2} \ \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{Tx_i}{r^2} - \frac{T \ x_i r^2}{r^4} + \frac{2 \ Tx_i}{r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_i}{r^2} \ (x_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + 2 \ T) = 0$$ και καθώς $x_i \neq 0$

(δεδομένου ότι το σημείο P δεν συμπίπτει με την αρχή των αξόνων O) θα είναι τελικά :

$$x_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + 2 \ T = 0 \qquad (5)$$

β. Από την εκφώνηση η T είναι συνάρτηση μόνο του r, $T = T(r)$.

Είναι :

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial T}{\partial r}\ \frac{\partial r}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{x_j}{r}$$

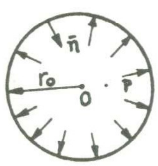
Αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση στη σχέση (5) που μόλις αποδείξαμε παίρνουμε :

$$x_j \cdot \frac{x_j}{r}\ \frac{\partial T}{\partial r} + 2T = 0 \Rightarrow \frac{r^2}{r}\ \frac{\partial T}{\partial r} = -\ 2T \Rightarrow \frac{\partial T}{T} = -2\ \frac{\partial r}{r} \Rightarrow$$

$$\ln T = -\ 2\ln r + \ln c \Rightarrow \ln T = \ln \frac{c}{r^2} \Rightarrow T = \frac{c}{r^2} \tag{6}$$

Θα υπολογίζουμε τώρα τη σταθερά c. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο M της Γ_o για το οποίο το κάθετο διάνυσμα $\bar{n}$ θα έχει συνιστώσες

$$n_i = \frac{x_i}{r_o} = \alpha_i\ (r_o)$$



[Οι συνιστώσες n_i είναι τα συνιμήτονα κατεύθυνσης του n με τους άξονες X_1, X_2, X_3]. Οι συνιστώσες του διανύσματος t της επιφανειακής φόρτισης θα είναι :

$$t_i = -\ p\ .\ n_i = -\ \frac{px_i}{r_o} \tag{7}$$

Η έκφραση όμως των. t_i συναρτήσει των συνιστωσών του τανυστή τάσης είναι (σ.21) :

$$t_i = \sigma_{ij}\ n_j \Rightarrow t_i(r_o) = T(r_o)\alpha_i(r_o)\alpha_j(r_o)n_j(r_o) =$$

$$= T(r_o)\ \frac{x_i}{r_o}\ \frac{x_j}{r_o}\ \frac{x_j}{r_o} \Rightarrow t_i(r_o) = T\ (r_o)\ \frac{x_i}{r_o} \cdot \frac{r_o^2}{r_o^2} \Rightarrow$$

$$t_i(r_o) = T(r_o)\ \frac{x_i}{r_o} \tag{8}$$

Από τις (5), (7) και (8) προκύπτει :

$$-p\,\frac{x_i}{r_o} = \frac{c}{r_o^2}\,\frac{x_i}{r_o} \Rightarrow c = -\,pr_o^2$$

'Ετσι θα είναι τελικά

$$T = -p\left(\frac{r_o}{r}\right)^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Θεωρούμε ένα ελαστικό σώμα Σ για το οποίο εισάγουμε τους παρακάτω συμβολισμούς :

S είναι η εξωτερική επιφάνεια και V ο όγκος του Σ,

$\overline{F}\,(x_i)$ οι μαζικές δυνάμεις που ασκούνται στον όγκο V ,

$\overline{t}\,(x_i)$ οι επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται στο τμήμα S_t της S , για την οποία το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα είναι $\overline{n}$. Στο τμήμα S_u της S $(S_t \cup S_u = S)$ οι επιφανειακές δυνάμεις είναι μηδενικές,

$\overline{u}\,(x_i)$ οι μετατοπίσεις στο τμήμα S_u ,

$\underset{\sim}{\sigma}^*$ μια οποιαδήποτε διανομή τάσης στο Σ που είναι ισοδύναμη με τις εξωτερικές φορτίσεις $\overline{F}$ στον όγκο V και $\overline{t}$ στην επιφάνεια S_t. Η σ^* δεν είναι αναγκαστικά πραγματική. Ας είναι ακόμη $\overline{u}^*(x_i)$ και $\overline{\varepsilon}^*(x_i)$ μια οποιαδήποτε συμβιβαστή διανομή μετακινήσεων για την οποία

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^*_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{και} \quad \overline{u}^*(x_i) = 0 \text{ για } x_i \in \Sigma_u .$$

Να αποδειχθούν οι σχέσεις :

$$\int_V \sigma^*_{ij}\,\varepsilon^*_{ij}\,d\,v = \int_{S_t} \overline{t}\;\overline{u}^* d\,s + \int_V \overline{F}\;\overline{u}^* d\,V$$

$$\int_V \sigma^*_{ij} dv = \frac{1}{2} \oint_S (t_i x_j + t_j x_i)\, ds + \frac{1}{2} \int_V (F_i x_j + F_j x_i)\, dv =$$

$$= c_{ijkl} \oint_s u_k n_l ds$$

όπου c_{ijkl} είναι οι ελαστικές σταθερές του υλικού και
$\bar{u}$ οι πραγματικές μετατοπίσεις των σημείων της S_t

ΛΥΣΗ

Όπως είναι γνωστό από τη γενική θεωρία γραμμικής ελαστικότητας, η καταστατική εξίσωση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων είναι :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \tag{1}$$

Από την εκφώνηση και με βάση τις ιδιότητες των $\underset{\sim}{\sigma}^*$, $\bar{u}^*(x_i)$ θα είναι :

$$\bar{u}^*(x_i) = 0 \quad \text{για} \quad x_i \in S_u \tag{2}$$

$$\frac{\partial \sigma^*_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \tag{3}$$

$$t_i(x_i) = \sigma^*_{ij}(x_i) n_j(x_i) \quad \text{για} \quad x_i \in S_t$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ακόμη και το θεώρημα του Green που μετασχηματίζει ένα κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα σε τριπλό (Βλ. σ.152, 118).

Έχουμε :

$$\int_{S_t} \bar{t}.\bar{u}^* ds + \int_V \bar{F}.\bar{u}^* dv = \int_{S_t} t_i u_i^* ds + \int_V F_i u_i^* dv =$$

$$= \int_{S_t} \sigma^*_{ij} n_j u^*_i ds + \int_V F_i u^*_i dv = \quad (\text{λόγω της} \quad (2))$$

$$= \oint_S \sigma^*_{ij} n_j u^*_i ds + \int_V F_i u^*_i dv = \int_V \frac{\partial(\sigma^*_{ij} u^*_i)}{\partial x_j} dv + \int_V F_i u^*_i dv =$$

$$=\int_V \frac{\partial \sigma^*_{ij}}{\partial x_j} u^*_i \, dV + \int_V \sigma^*_{ij} \frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} dV + \int_V F_i u^*_i dV = \int_V \Bigg(\underbrace{\frac{\partial \sigma^*_{ij}}{\partial x_j} + F_i}_{=0 \text{ λόγω της } (3)} \Bigg) u^*_i dV +$$

$$\int_V \sigma^*_{ij} \frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} dv = \int_V \sigma^*_{ij} \frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} dv = \int_V \sigma^*_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^*_j}{\partial x_i} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \sigma^*_{ij} \, \varepsilon^*_{ij} \, dv$$

Για τη δεύτερη σχέση έχουμε :

$$\frac{1}{2} \oint_S (t_i x_j + t_j x_i) ds + \frac{1}{2} \int_V (F_i x_j + F_j x_i) dv = \frac{1}{2} \oint_S (\sigma^*_{im} n_m x_j +$$

$$+ \sigma^*_{jm} n_m x_i) ds + \frac{1}{2} \int_V (F_i x_j + F_j x_i) dv = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{\partial(\sigma^*_{im} x_j)}{\partial x_m} + \frac{\partial(\sigma^*_{jm} x_i)}{\partial x_m} \right] dv$$

$$+ \frac{1}{2} \int_V (F_i x_j + F_j x_i) dv = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial \sigma^*_{im}}{\partial x_m} + F_i \right) dv +$$

$$\frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial \sigma^*_{jm}}{\partial x_m} + F_j \right) x_i dv + \frac{1}{2} \int_V \sigma^*_{im} \frac{\partial x_j}{\partial x_m} dv + \frac{1}{2} \int_V \sigma^*_{jm} \frac{\partial x_i}{\partial x_m} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \sigma^*_{im} \delta_{jm} \, dv + \frac{1}{2} \int_V \sigma^*_{jm} \delta_{im} \, dv = \frac{1}{2} \int_V \sigma^*_{ij} \, dv + \frac{1}{2} \int_V \sigma^*_{ij} dv =$$

$$= \int_V \sigma^*_{ij} \, dv \qquad (5)$$

Για να προκύψει και το τελευταίο μέλος της δεύτερης σχέσης που αποδεικνύουμε, θα χρησιμοποιήσουμε την (1) καθώς και το ότι (λόγω των υποθέσεων της εκφώνησης της άσκησης) η (5) θα ισχύει και για τις πραγματικές τάσεις σ_{ij}.

Θα είναι λοιπόν :

$$\frac{1}{2} \oint_S (t_i x_j + t_j x_i) ds + \frac{1}{2} \int_V (F_i x_j + F_j x_i) dv = \int_V \sigma_{ij} dv =$$

$$\int_V c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}dv = \frac{1}{2}\int_V c_{ijkl}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)dv = \frac{1}{2}\int_V (cijkl\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+$$

$$+ c_{ijlk}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\,)\,dv =$$ (χρησιμοποιήθηκε η συμμετρικότητα του τανυστή ελαστικών σταθερών $c_{ijkl}=c_{ijlk}$)

$$= \int_V c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}dv = c_{ijkl}\oint_S u_k n_l d_s$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεωρούμε μια κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης στο επίπεδο $x_1 - x_2$ χωρίς μαζικές δυνάμεις. Αν η λύση του προβλήματος αυτού για τις μετατοπίσεις είναι της μορφής :

$$u_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\quad,\quad u_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\quad,$$

όπου Φ και Ψ είναι συναρτήσεις των x_1 και x_2, να αποδειχθούν οι σχέσεις :

$$\nabla^2\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right] = 0$$

$$\nabla^2\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right] = 0$$

ΛΥΣΗ

Από τις εκφράσεις των μετατοπίσεων και από τη σχέση :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

υπολογίζουμε αμέσως τις παραμορφώσεις :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad , \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right)$$

Λύνοντας ως προς σ τις σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων της σ.31 παίρνουμε :

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} [\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu} [\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})]$$

$$\sigma_{33} = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις αυτές των σ στις εξισώσεις ισορροπίας με μαζικές δυνάμεις μηδενικές.

Θα είναι :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = 0 \wedge \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} = 0 \wedge \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} = 0$$

και αναπτύσσοντας ως προς τον επαναλαμβανόμενο δείκτη j :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

0 διότι Φ, Ψ συναρτήσεις των x_1, x_2

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}} = 0$$

Αντικαθιστώντας τώρα στις εξισώσεις ισορροπίας τις εκφράσεις των ε παίρνουμε :

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\partial x_2} = 0$$

Αντικαθιστούμε στις παραπάνω τις εκφράσεις των ε συναρτήσει των Φ και Ψ , οπότε παίρνουμε :

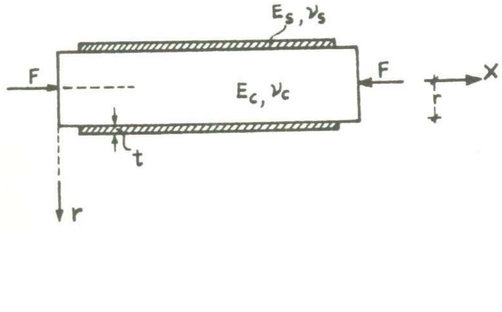
$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \Phi + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \Phi) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 \Psi = 0$$

$$\nabla^2 [(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}] = 0$$

$$\nabla^2 [\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}] = 0$$

Εντελώς αντίστοιχα προκύπτει και η δεύτερη σχέση που έχουμε να αποδείξουμε.

ΑΣΚΗΣΗ 5



Κυλινδρική ράβδος από χαλκό διατομής A περιβάλλεται από λεπτότοιχο χαλύβδινο σωλήνα πάχους t , ο οποίος παρεμποδίζει μερικά την εγκάρσια διαστολή της ράβδου. Για αξονική ομοιόμορφα κατανεμημένη δύναμη F ζητούνται :

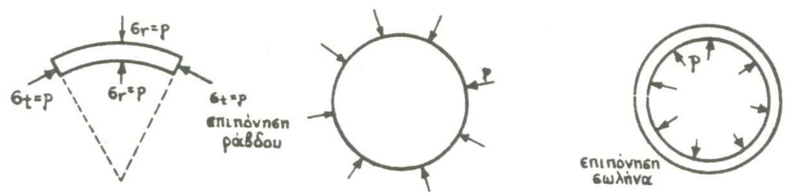
α. Η πίεση μεταξύ σωλήνα και ράβδου και η διαμήκης και εγκάρσια παραμόρφωση της ράβδου.

β. Όμοια για μεταβολή θερμοκρασίας κατά Δt.

Παρατήρηση :
Τριβή μεταξύ σωλήνα και ράβδου δεν θα ληφθεί υπόψη.

ΛΥΣΗ

α. Στην περίπτωση επιπόνησης από τη δύναμη F θα έχουμε:



Για τη χάλκινη ράβδο :

$$\sigma_{xx} = -\frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_c}\,[\sigma_{xx} - \nu_c\,(\sigma_{rr} + \sigma_{tt})]$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_c}\,[\sigma_{rr} - \nu_c\,(\sigma_{xx} + \sigma_{tt})]$$

και καθώς $\sigma_{rr} = \sigma_{tt} = -p$, η διαμήκης και εγκάρσια παραμόρφωση της ράβδου γίνονται αντίστοιχα :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_c}\,(-\frac{F}{A} + 2\nu_c p) \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_c}\,[\,-p(1-\nu_c) + \frac{\nu_c F}{A}\,] \qquad (2)$$

Για το χαλύβδινο σωλήνα, του οποίου η εντατική κατάσταση είναι μονοαξονική, με εφαρμογή της σχέσης

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{t}$$

προκύπτει :

$$\frac{\sigma_t}{r} = \frac{p}{t} \quad \text{και} \quad \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_s} = \frac{pr}{E_s t}$$

Η συνθήκη συμβιβαστού των παραμορφώσεων θα είναι :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{tt} \Rightarrow \frac{1}{E_c}\left[- p(1-\nu_c) + \frac{\nu_c F}{A}\right] = \frac{p.r}{E_s t}$$

$$p = \frac{\nu_c F E_s t}{A[rE_c + E_s t(1-\nu_c)]}$$

Αντικαθιστώντας τώρα στις (1) και (2) προκύπτουν οι ζητούμενες τιμές των ε_{xx} , ε_{rr} .

β. Στην περίπτωση μεταβολής της θερμοκρασίας κατά Δt θα είναι $F = 0$ και $\sigma_{xx} = 0$, ενώ η ολική παραμόρφωση της ράβδου ακτινικά θα είναι το άθροισμα της παραμόρφωσης λόγω Δt και της παραμόρφωσης λόγω p ,

$$\varepsilon_{rr}^{tot} = \varepsilon_{rr}^{\Delta t} + \varepsilon_{rr}^{p} \qquad (3)$$

Είναι :

$$\varepsilon_{rr}^{\Delta t} = \alpha_c \Delta t$$

και από την (2) για $F = 0$ προκύπτει :

$$\varepsilon_{rr}^{p} = \frac{1}{E_c}\,[p(\nu_c - 1)]$$

Έτσι :

$$\varepsilon_{rr}^{tot} = \alpha_c \Delta t + \frac{1}{E_c} p(\nu_c - 1) \qquad (4)$$

Εντελώς αντίστοιχα θα έχουμε για το χαλύβδινο σωλήνα :

$$\varepsilon_{tt}^{tot} = \varepsilon_{tt}^{\Delta t} + \varepsilon_{tt}^{p} = \alpha_s \Delta t + \frac{p.r}{E_s t}$$

Η συνθήκη συμβιβαστού των παραμορφώσεων θα είναι και εδώ

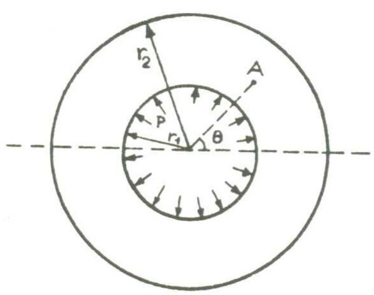
$$\varepsilon_{rr}^{tot} = \varepsilon_{tt}^{tot}$$

από όπου προκύπτει :

$$p = \frac{(\alpha_c - \alpha_s)\ E_s E_c t\ \Delta t}{rE_c - (\nu_c - 1)\ E_s t}$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (4) προκύπτει η εγκάρσια παραμόρφωση της ράβδου και εντελώς αντίστοιχα η διαμήκης.

ΑΣΚΗΣΗ 6



Κύλινδρος άπειρου μήκους έχει διατομή κυκλικού δακτυλίου με εσωτερική ακτίνα r_1 και εξωτερική r_2 και φορτίζεται με ομοιόμορφη εσωτερική πίεση p.

Να υπολογισθούν η τασική συνάρτηση του προβλήματος και οι τάσεις σε τυχαίο σημείο A που έχει πολικές συντεταγμένες r και θ.

ΛΥΣΗ

Επειδή ο κύλινδρος έχει άπειρο μήκος, έχουμε την περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης. Η τασική συνάρτηση θα ικανοποιεί τη διαρμονική εξίσωση $\nabla^4\Phi = 0$, όπου η έκφραση του $\nabla^4\Phi$ σε πολικές συντεταγμένες είναι (βλ. σελ. 46) :

$$\nabla^4\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)$$

Επειδή στο πρόβλημά μας υπάρχει κυκλική συμμετρία, στην τασική συνάρτηση δεν θα εμφανίζονται παράγοντες που περιέχουν το θ ή συναρτήσεις του θ , αλλά θα υπάρχουν μόνο όροι ανάλογοι προς το r . Έτσι $\Phi = \Phi(r)$ και οι μερικές παράγωγοι ως προς r ισούνται με τις ολικές παραγώγους.

Η διαρμονική εξίσωση λοιπόν γίνεται :

$$\nabla^4\Phi = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$$

και με τις κατάλληλες ολοκληρώσεις υπολογίζεται η Φ που θα έχει τη μορφή :

$$\Phi(r) = c_1 r^2 \ln r^2 + c_2 \ln r + c_3 r^2 + c_4$$

Για τον υπολογισμό των τάσεων αρκεί ο υπολογισμός των c_1, c_2, c_3, διότι δεδομένου ότι οι τάσεις είναι συναρτήσεις των παραγώγων της Φ δεν θα υπεισέλθει η c_4

Για τον υπολογισμό των τριών αυτών σταθερών θα χρησιμοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες

$$\sigma_{rr}(r = r_1) = -p \qquad (1)$$

$$\sigma_{rr}(r = r_2) = 0 \tag{2}$$

καθώς και η συνθήκη συμβιβαστού. Για την επίπεδη εντατική κατάσταση του προβλήματος θα έχουμε :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_r}{r}$$

και

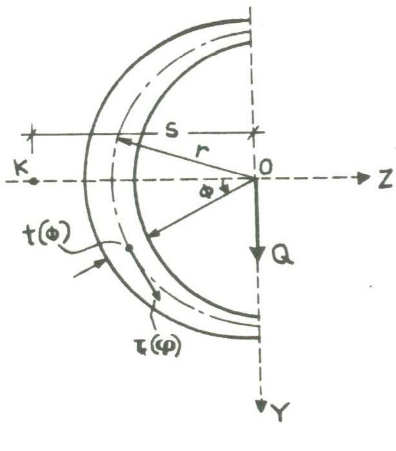
$$\frac{d}{dr}(r\,\varepsilon_{\vartheta\vartheta}) = \ _{rr} \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας τις (1) , (2) , (3) και μετά τις πράξεις προκύπτει ότι :

$$\sigma_{rr} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right] , \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[1 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right] ,$$

$$\sigma_{r\vartheta} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 7



Θεωρούμε δοκό με λεπτόπαχη ανοιχτή ημικυκλική διατομή , της οποίας η μέση ακτίνα είναι r . Το μεταβλητό πάχος $t(\varphi)$ που αντιστοιχεί στην πολική γωνία φ δίνεται από τη σχέση :

$$t(\varphi) = \frac{t_o}{2}(1+\cos\varphi) , \ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Η δοκός καταπονείται σε καθαρή κάμψη και η τέμνουσα δύναμη της διατομής κατά τον άξονα Υ είναι ίση με Q.

Να υπολογισθούν :

α. Η ροπή αδράνειας I_{zz}

β. Η συνισταμένη διατμητική τάση $q(\varphi)$, που αντιστοιχεί στη γωνία φ , για καθαρή κάμψη

γ. Η θέση του κέντρου διάτμησης

ΛΥΣΗ

α. Εντελώς αντίστοιχα με την άσκηση της σελ. 56 θα έχουμε ότι το στοιχειώδες εμβαδό που αντιστοιχεί στη γωνία φ θα είναι :

$$dA(\varphi) = t(\varphi)rd\varphi = \frac{rt_o}{2}(1+\cos\varphi)\, d\varphi$$

και η απόστασή του από τον άξονα z θα είναι :

$$y(\varphi) = r\sin\varphi$$

Η ροπή αδράνειας I_{zz} θα υπολογισθεί από τη σχέση :

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^3 t_o}{2} \sin^2\varphi\,(1+\cos\varphi)\, d\varphi \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις τριγωνομετρικές ταυτότητες :

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\ , \quad \cos\varphi.\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(\cos\varphi + \cos 3\varphi)$$

και μετά την εκτέλεση των πράξεων

$$I_{zz} = \frac{3\pi+4}{12}\, t_o r^3$$

β. Η στοιχειώδης διατμητική τάση για καθαρή κάμψη δίνεται για την τυχαία τομή s από τη σχέση :

$$\tau_{(s)} = \frac{Q_y}{I_{zz} t(s)} \int_0^s t(\omega) y(\omega) d\omega$$

όπου :

$$t(\omega) = t(\vartheta) = \frac{t_o}{2} (1+\cos\vartheta)$$

$$y(\omega) = y(\vartheta) = r \sin\vartheta \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$d\omega = r d\vartheta$$

$$t(s) = t(\varphi) = \frac{t_o}{2} (1+\cos\varphi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

οπότε :

$$\tau(\varphi) = \frac{Q_y}{\frac{t_o}{2} (1+\cos\varphi) I_{zz}} \int_{-\pi/2}^{\varphi} \frac{r^2 t_o}{2} \sin\vartheta \, (1+\cos\vartheta) d\vartheta$$

και μετά την εκτέλεση των ολοκληρώσεων :

$$\tau(\varphi) = \frac{6}{3\pi+4} \cdot \frac{Q_y}{r t_o} \cdot \frac{\cos\varphi(2+\cos\varphi)}{1+\cos\varphi}$$

γ. Υπολογίζουμε πρώτα τη στοιχειώδη στρεπτική ροπή λόγω διατμητικής τάσης τ(s) :

$$dM = \tau(s) dA . r = \tau(\varphi) . r . d\varphi . t(\varphi) . r$$

και μετά τις πράξεις :

$$dM = \frac{3Q\,r}{3\pi+4} \cos\varphi(2+\cos\varphi) \; d\varphi$$

Η συνολική ροπή M θα προκύψει με ολοκλήρωση της dM για

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

και

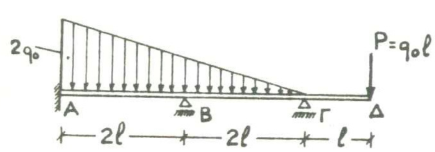
$$M = \frac{3Qr\ (\pi+8)}{2(3\pi+4)}$$

Η διατομή δεν καταπονείται από τη ροή M όταν η τέμνουσα δύναμη διέρχεται από το κέντρο διάτμησης K, επομένως :

$$M = Q.s \Rightarrow s = \frac{3(\pi+8)}{2(3\pi+4)}$$

(βλ. και σελ. 83,84,93,94).

ΑΣΚΗΣΗ 8



Να επιλυθεί η συνεχής δοκός του σχήματος με τη μέθοδο Clapeyron.

ΛΥΣΗ

Ο φορέας είναι δύο φορές υπερστατικός. Θεωρούμε ως αγνώστους τις ροπές M_A, M_B. Με βάση όσα αναπτύξαμε στη σελ. 97 (άσκ.2) θεωρούμε αριστερά από την τάκτωση Α ένα φανταστικό άνοιγμα ΑΑ΄ απείρως μικρού μήκους ε.

Εφαρμόζουμε για τα τμήματα Α΄ΑΒ , ΑΒΓ την εξίσωση

Clapeyron.

$$M_\alpha l_\alpha + 2M_\beta(l_\alpha + l_\beta) + M_\gamma l_\beta = -\frac{6A_\alpha \overline{x}_\alpha}{l_\alpha} - \frac{6A_\beta \overline{x}_\beta}{l_\beta}$$

Υπολογίζοντας από πίνακες τις ποσότητες του δεύτερου μέλους παίρνουμε :

Τμήμα Α΄ΑΒ : $2M_A.2l + M_B.2l = -\frac{1}{4}q_0(2l)^3 - \frac{8}{60}q_0(2l)^3$ (1)

Τμήμα ΑΒΓ : $M_A.2l + 2M_B(2l+2l) + M_\Gamma.2l =$

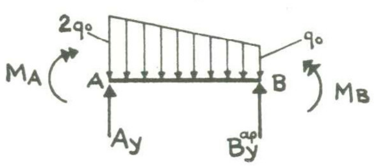
$$= -\frac{1}{4}q_0(2l)^3 - \frac{7}{60}q_0(2l)^3 - \frac{8}{60}q_0(2l)^3 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας το M_Γ στη (2) με την τιμή του, $M_\Gamma = -q_0 l^2$, και επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει :

$$M_A = -\frac{11}{15}q_0 l^2 \ , \quad M_B = -\frac{1}{15}q_0 l^2$$

Η εύρεση των αντιδράσεων στις στηρίξεις Α,Β,Γ, θα γίνει κατά τα γνωστά από την Τεχνική Μηχανική.
Θεωρούμε τα τρία φατνώματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ξεχωριστά και έχουμε :

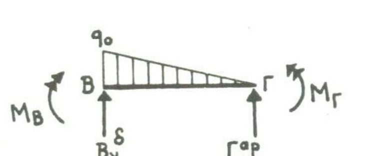
Φάτνωμα ΑΒ



Από τη συνθήκη ισορροπίας κατά Υ και από την εξίσωση ροπών ως προς Α ή Β προκύπτει :

$$A_y = 2q_0 l \ , \quad B_y^{\alpha\rho} = q_0 l$$

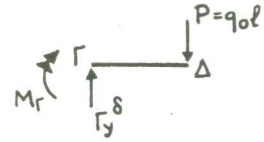
Φάτνωμα ΒΓ



Εντελώς αντίστοιχα προκύπτει :

$$B_y^{\delta} = \frac{q_0 l}{5} \ , \quad \Gamma_y^{\alpha\rho} = \frac{q_0 l}{5}$$

Φάτνωμα ΓΔ



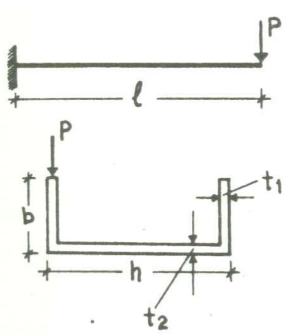
Η συνθήκη ισορροπίας κατά Y δίνει αμέσως :

$$\Gamma_y^{\delta} = q_o l$$

Οι τιμές των αντιδράσεων στα A,B,Γ θα προκύψουν κάνοντας την επαλληλία, οπότε :

$$A_y = 2q_o l \;,\; B_y = B_y^{\alpha\rho} + B_y^{\delta} = \frac{6}{5}\, q_o l \;,\; \Gamma_y = \Gamma_y^{\alpha\rho} + \Gamma_y^{\delta} = \frac{9}{5}\, q_o l$$

ΑΣΚΗΣΗ 9



Θεωρούμε τον πρόβολο του σχήματος που αποτελείται από λεπτόπαχη διατομή σχήματος ⊔ και καταπονείται έκκεντρα με δύναμη P.

Να υπολογισθεί η κατανομή των διατμητικών τάσεων λόγω κάμψης και στρέψης σε τυχαία διατομή του προβόλου.

Να γίνει εφαρμογή για $l = 2{,}50$m, $P = 1$t , $b = 11$ cm , $h = 40$ cm, $t_1 = 1{,}8$ cm , $t_2 = 1{,}4$ cm.

ΛΥΣΗ

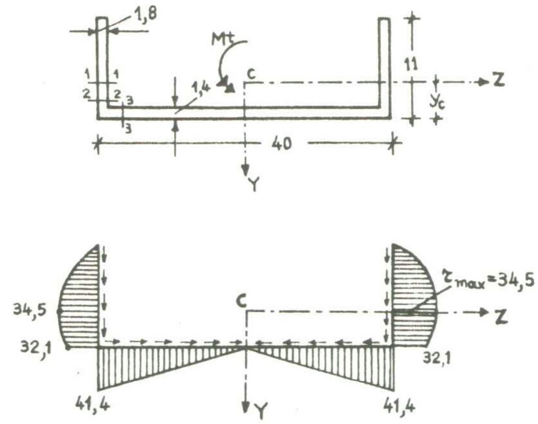
Υπολογίζουμε πρώτα τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής.

Τεταγμένη κέντρου βάρους $Y_C = 2{,}28$ cm

Ροπή αδράνειας $I_{zz} = 1.101$ cm^4

Στατική ροπή $S_z^{11} = -\,68{,}43$ cm^3

$S_z^{22} = -\,63{,}76$ cm^3



<u>Επιπόνηση σε κάμψη</u> .

Η διατμητική τάση λόγω κάμψης σε μια τομή s θα είναι :

$$\tau_s = \frac{Q_y \,.\, S_z}{I_{zz}t(s)}$$

Για τις τομές 11, 22 και 33 υπολογίζουμε αντίστοιχα

$\tau^{11} = 34,5 \text{ kg/cm}^2$, $\tau^{22} = 32,1 \text{ kg/cm}^2$, $\tau^{33} = 41,4 \text{ kg/cm}^2$

Κατασκευάζουμε έπειτα το διάγραμμα διατμητικών τάσεων και σχεδιάζουμε τη ροή τους (βλ. και σελ. 82,83).

<u>Επιπόνηση σε στρέψη</u>

Έχουμε :

$$M_t = P\,\frac{h}{2} = 2.10^4 \text{ kg cm}$$

$$\tau_{max} = G.\Theta.t(s) \tag{1}$$

$$M_t = \frac{G\Theta}{3}\int_0^s t^3(s)ds \tag{2}$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) και με εκτέλεση των πράξεων προκύπτει :

$$\tau_{max} = 252,03 \,.\, t(s)$$

και επομένως για τις πλευρές της διατομής θα είναι

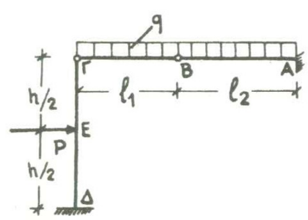
$$\tau_{max} = 252,03.1,8 = 453,7 \text{ kg/cm}^2$$

ενώ για το πέλμα

$$\tau_{max} = 252,03.1,4 = 352,9 \text{ kg/cm}^2$$

Η κατανομή των διατμητικών τάσεων λόγω κάμψης και στρέψης θα προκύψει κάνοντας την επαλληλία.

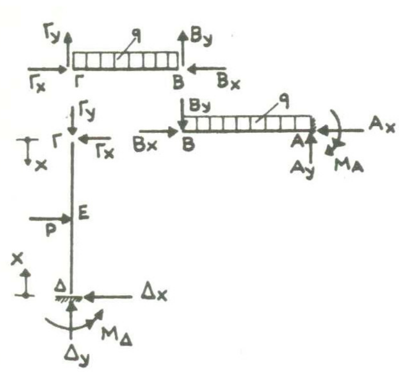
ΑΣΚΗΣΗ 10



Να επιλυθεί ο φορέας του σχήματος με τη μέθοδο Castiliagno.

ΛΥΣΗ

Ο φορέας αποτελείται από τρείς δοκούς, που καθεμιά τους δίνει 3 εξισώσεις ισορροπίας (συνολικά 9 εξισώσεις) και έχει 10 αγνώστους (από 3 στις πακτώσεις Α και Δ και από 2 στις αρθρώσεις Β και Γ), άρα είναι μια φορά υπερστατικός. Επιλέγουμε ως υπερστατικό μέγεθος την οριζόντια συνιστώσα της αντίδρασης στο Δ .



Αναλύουμε τη στατική λειτουργία κάθε δοκού του φορέα. Η Δ_x θα προκύψει από τη σχέση :

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_x} = 0 \quad ,$$

όπου U η ενέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης, η οποία στα τμήματα ΓΒ, ΒΑ δεν είναι συνάρτηση της Δ_x .

Αρκεί λοιπόν ο υπολογισμός της U για το τμήμα ΓΔ.
Έχουμε :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \Gamma_x = P - \Delta_x$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \Gamma_y = \Delta_y$$

$$\Sigma M_\Delta = 0 \Rightarrow M_\Delta = \Delta_x h - \frac{Ph}{2}$$

Για τα τμήματα ΓΕ, ΔΕ θα έχουμε :

$$\Gamma E : M(x) = \Gamma_x . x - (P - \Delta_x) x \ , \quad \frac{\partial M(x)}{\partial \Delta_x} = -x \quad , \text{ για } \quad 0 < x < \frac{h}{2}$$

$$\Delta E : M(x) = - M_\Delta + \Delta_x . x = - \Delta_x h + \frac{Ph}{2} + \Delta_x . x \ ,$$

$$\frac{\partial M}{\partial \Delta_x} = - h + x \ , \quad 0 < x < \frac{h}{2}$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης U λόγω κάμψης είναι :

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^x M^2(x)\, dx \quad ,$$

και

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_x} = \frac{1}{EI} \int_0^x M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial \Delta_x} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{h/2} (P - \Delta_x) . x(-x) dx +$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{h/2} (- \Delta_x h + \frac{Ph}{2} + \Delta_x . x)(- h + x)\, dx = 0 \Rightarrow \Delta_x = \frac{11P}{16}$$

και τελικά :

$$\Gamma_x = P - \frac{11}{16} P = \frac{5}{16} P = B_x = A_x$$

$$M_\Delta = \frac{3}{16} Ph$$

$$\Gamma_y = B_y = \frac{1}{2} ql_1 = \Delta_y$$

$$A_y = ql_2 + B_y = q(\frac{l_1}{2} + l_2)$$

$$M_A = \frac{1}{2} ql_2 \ (l_1 + l_2 \ )$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γ. Μ. Λιάνης : Μηχανική παραμορφωσίμων σωμάτων καί Ἀντοχή Ὑλικῶν. Θεσσαλονίκη 1979.

2. Αἰμ. Κανελλόπουλος : Ἀντοχή Ὑλικῶν. Θεσσαλονίκη 1973.

3. Γ. Νιτσιώτας : Μαθήματα Στατικῆς. Τόμος I. Ἀντοχή τῶν Ὑλικῶν.

4. Π. Σ. Θεοχάρης : Πειραματική Ἀντοχή τῶν Ὑλικῶν. Ἀθῆναι 1970.

5. Θ. Σ. Ξανθόπουλος : Στοιχεῖα Τανυστικοῦ Λογισμοῦ. Θεσσαλονίκη 1973.

6. Σ. Ι. Φυτάνογλου : Ἀσκήσεις Ἀντοχῆς Ὑλικῶν. Ἀθῆναι 1969.

7. St. Timoshenko : Strength of Materials, Part I - Part II. Van Nostrand Reinhold Co.

8. A. Green - W. Zerna : Theoretical Elasticity. Oxf. U.P.

9. J. E. Shigley : Mechanical Engineering Design - Second Edition. Mc.Graw - Hill Series in Mechanical Engineering.

10. B. Venkatramann - S. Patel : Structural Mechanics with introductions to Elasticity and Plasticity. Mc. Graw - Hill Editions.

11. M. Albigés - A. Coin : Résistance des Matériaux Appliquée. Tome I-II. Collection de l' Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics.

12. E. Callandreau : Problèmes de Résistance des Matériaux. Éditions Albin Michel.

13. István Szabó : Einführung in die Technische Mechanik. Springer-Verlag.

14. István Szabó : Höhere Technische Mechanik. Springer-Verlag.

15. István Szabó : Repertorium und Übungsbuch der Technischen Mechanik. Springer-Verlag.

16. An aid to solving Problems in Strength of Materials. Mir Publishers - Moscow. Translated from the Russian by Yuri Ermolyen. Μετάφραση στά ἀγγλικά τῆς ρωσσικῆς ἔκδοσης τοῦ 1969.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

γραφικη δουλεια :

„underground track"

ISBN 960-7013-09-3